

前言

当今社会，教育作为个人成长和社会进步的重要基石，其重要性日益凸显。而本科文凭是诸多用人单位的最低要求，也是公务员、考研、国家编制等的最低门槛。所以，选择全日制专升本是提升学历、拓宽职业发展的重要途径，对于广大有志青年而言，这无疑是一次宝贵的机会。它不一定能改变你的人生，但是一定可以给你更多的选择。然而，在如今知识更替日新月异的大潮中，注重基础、框架清晰且阶段明确的专升本辅导用书却寥寥无几，这也为本书的编写创造了契机。

根据最新《重庆市普通高校“专升本”统一选拔考试大纲》及历年真题来看，专升本数学考试内容变化不大，题型稳定，依然保持着考试内容较宽泛、综合性较强、考点难易度适中的现状。但是尽管如此，数学基础一般的同学，仍然会对数学学科充满畏惧感，毕竟考试内容涵盖《高等数学》《线性代数》《概率论》三本书的内容，针对这一现实情况，蓝色森林数学教研组特编写了这本满足学生备考需求的辅导用书。结合高职高专学生的特点，本书尽量使深奥的数学理论以通俗易懂的形式展现出来。总的来说本书具备以下特色：

一、知识全面，普适性强 本书结合考纲参考书目，内容涵盖微积分、线性代数、概率论等核心内容，其编写注重基本概念与理论的梳理，确保读者掌握必要的数学概念和技能。从学生易于理解的角度，将各大知识点理论部分由浅入深进行编排，目的在于帮助不同基础的学生学习使用。同时，在每小节前还附有考试大纲，便于学生自学与复习时有更多的参考。

二、贴合考纲，直击考点 本书紧贴最新考试大纲编订，确保内容的时效性和准确性。还深入研究了历年的考试真题，提炼出考试高频考点和难点，力求为考生提供一份高效、实用的学习资料。

三、归纳总结，方法突出 由于数学学科存在专业独立性强，逻辑严谨，理论过于深奥的特性。因此，本书在编排过程中，为了帮助读者快速掌握核心内容，对易错

易混及考试重难点进行了全面梳理，同时，还归纳了常见题型及解题方法，旨在帮助考生更好地掌握基础知识，提高解题能力和应试技巧。

四、配套练习，难易适中 本书的例题及同步练习题量充足，且具有梯度，练习题章节与教材同步，便于学生即学即练。同时，在习题的选取上一是注重基础，二是参照了全国专升本真题，题型丰富，针对性强。相信通过大量的练习，很多同学的数学成绩都能有质的飞跃。

参与本书编订工作的都是蓝色森林数学教研组的资深教师。他们呕心沥血的对本书进行了多轮审核修订，但教材中难免存在不足之处，希望广大读者提出批评和指正。

蓝色森林 专升本教研中心

目 录

第一章 函数、极限与连续	1
第一节 函数	1
第二节 极限	15
第三节 连续与间断	31
第二章 导数与微分	38
第一节 导数	38
第二节 导数的应用	60
第三节 微分中值定理	79
第三章 一元函数积分学	86
第一节 不定积分	86
第二节 定积分	102
第三节 定积分的应用	120
第四章 多元函数微积分学	124
第一节 多元函数微分学	124
第二节 二重积分	139
第五章 微分方程	149
第一节 一阶微分方程	149
第二节 二阶常系数齐次线性微分方程	161
第六章 无穷级数	164
第一节 常数项级数的概念和性质	164
第二节 常数项级数的审敛法	171

第三节 幂级数.....	180
第七章 线性代数.....	184
第一节 行列式.....	184
第二节 矩阵.....	196
第三节 线性方程组.....	211
第八章 向量代数与空间解析几何.....	218
第一节 向量代数.....	218
第二节 空间解析几何.....	226
第九章 概率统计.....	233
第一节 随机事件及其事件关系.....	233
第二节 随机事件的概率.....	237
第三节 随机变量及其分布.....	243
附录一 重庆市普通高校“专升本”统一选拔考试大纲高等数学	249

蓝色森林专升本

蓝色森林专升本

第一章 函数、极限与连续

第一节 函数

本节学习目标

1. 理解函数的概念，知道函数的表示法；会求函数的定义域及函数值.
2. 掌握函数的奇偶性、单调性、周期性、有界性.
3. 理解复合函数与反函数的定义，会求单调函数的反函数.
4. 掌握基本初等函数的性质与图像，了解初等函数的概念.

一、函数的概念

定义 设变量 $x \in D \subset \mathbf{R}$ ，变量 $y \in \mathbf{R}$ ，如果存在一个对应法则 f ，使得每一个 $x \in D$ 都有唯一的值 y 与之对应，则称这个对应法则 f 是集合 D 上的一个**函数**，通常简记为

$$y = f(x), \quad x \in D,$$

其中 x 称为**自变量**， y 称为**因变量**， D 称为**定义域**．如果 $x_0 \in D$ ，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处有定义，函数 $f(x)$ 在 x_0 处的函数值记为

$$f(x_0) \text{ 或 } y|_{x=x_0},$$

函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合称为函数 f 的**值域**，记作 R_f 或 $f(D)$ ，即

$$R_f = f(D) = \{y | y = f(x), x \in D\}.$$

注：函数包含两个要素，即定义域和对应法则；如果两个函数的定义域和对应法则都相同，则这两个函数是**相等**的.

【归纳总结】常见需要考虑定义域的几种情形如下表 1-1:

表 1-1 常见需要考虑定义域的函数

分式函数分母不能为零	如 $y = \frac{1}{x-1}$, $D: \{x x \neq 1\}$
偶次根式的被开方式必须大于或等于零	如 $y = \sqrt{x}$, $D: \{x x \geq 0\}$



对数函数的真数必须大于零	如 $y = \log_a x, D: \{x x > 0\}$
三角函数要符合其定义域	如 $y = \tan x, D: \left\{x \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$, $y = \cot x, D: \{x x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
反三角函数	如 $y = \arcsin x, D: \{x -1 \leq x \leq 1\}$, $y = \arccos x, D: \{x -1 \leq x \leq 1\}$

当一个函数表达式含有上述几种函数，应取各部分定义域的交集。

例 1. 下列函数相等的是 () .

A. $y = \frac{x^2}{x}, y = x$

B. $y = \sqrt{x^2}, y = x$

C. $y = (\sqrt{x})^2, y = x$

D. $y = \sqrt{x^2}, y = |x|$

解：D 项： $y = \sqrt{x^2}$ 的定义域需满足 $x^2 \geq 0$ ，即 $x \in \mathbb{R}$ ；

$y = |x|$ 定义域也为 $x \in \mathbb{R}$ ； $y = \sqrt{x^2} = |x|$ ，

显然两个函数表达式也一样，则是同一个函数，故本题答案为 D 项。

A 项： $y = \frac{x^2}{x}$ 定义域为 $x \neq 0$ ； $y = x$ 定义域为 $x \in \mathbb{R}$ ；

显然两函数定义域不同，则不是同一个函数，故排除。

B 项： $y = \sqrt{x^2}$ 的定义域需满足 $x^2 \geq 0$ ，即 $x \in \mathbb{R}$ ；

$y = x$ 定义域也为 $x \in \mathbb{R}$ ； $y = \sqrt{x^2} = |x| \neq x$ ，

显然两个函数表达式不一样，则不是同一个函数，故排除。

C 项： $y = (\sqrt{x})^2$ 定义域为 $x \geq 0$ ； $y = x$ 定义域为 $x \in \mathbb{R}$ ；

显然两函数定义域不同，则不是同一个函数，故排除。

故本题答案为 D 项。



例 2. 求函数 $y = \sqrt{1-x^2}$ 的定义域.

解: 由题意可知, 要使函数有意义则需满足 $1-x^2 \geq 0$,

解得 $-1 \leq x \leq 1$, 即定义域为 $[-1, 1]$.

例 3. 求函数 $y = \arcsin(x-1) + \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ 的定义域.

解: 由题意可知, 要使函数有意义则需满足 $\begin{cases} -1 \leq x-1 \leq 1 \\ 4-x^2 > 0 \end{cases}$,

解得 $\begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ -2 < x < 2 \end{cases}$, 即定义域为 $[0, 2)$.

例 4. 已知函数 $y = f(x)$ 的定义域为 $[-3, 2]$, 求函数 $y = f(2x+1)$ 的定义域.

解: 由题可知, 函数 $y = f(x)$ 的定义域是 $[-3, 2]$, 即 $-3 \leq x \leq 2$,

所以 $-3 \leq 2x+1 \leq 2$, 解得 $-2 \leq x \leq \frac{1}{2}$,

即函数 $y = f(2x+1)$ 的定义域为 $\left[-2, \frac{1}{2}\right]$.

例 5. 已知 $f(x-1) = x^2 - 3x + 2$, 求函数 $f(x)$ 的解析式.

解: 令 $x-1 = t$, 则 $x = t+1$,

所以 $f(t) = (t+1)^2 - 3(t+1) + 2 = t^2 - t$,

故 $f(x) = x^2 - x$.

例 6. 已知 $f\left(\frac{x}{1+x}\right) = 2x+1$, 求函数 $f(x)$ 的解析式.

解: 令 $\frac{x}{1+x} = t$, 则 $x = \frac{t}{1-t}$,

所以 $f(t) = 2 \frac{t}{1-t} + 1 = \frac{t+1}{1-t}$,

故 $f(x) = \frac{x+1}{1-x}$.



二、函数的基本性质（掌握）

1. 单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 区间 $I \in D$. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1, x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调递增**的;

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 区间 $I \in D$. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1, x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调递减**的.

例如: $y = e^x$ 是单调递增的函数, $y = \log_{0.5} x$ 是单调递减的函数.

2. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称. 对于任意的 $x \in D$, 如果 $f(-x) = f(x)$ 恒成立, 则称 $f(x)$ 为**偶函数**;

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称. 对于任意的 $x \in D$, 如果 $f(-x) = -f(x)$ 恒成立, 则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

例如: $f(x) = x^2$, $f(x) = \cos x$ 是偶函数, $f(x) = x^3$, $f(x) = \sin x$ 是奇函数, 而 $f(x) = \sin x + \cos x$ 则为非奇非偶函数.

注: 与奇偶性相关的常用结论

- (1) 偶函数+偶函数=偶函数;
- (2) 奇函数+奇函数=奇函数;
- (3) 偶函数 $\times$ 偶函数=偶函数, 奇函数 $\times$ 奇函数=偶函数;
- (4) 偶函数 $\times$ 奇函数=奇函数;
- (5) 对于奇函数, 若 $x=0$ 在定义域内, 必有 $f(0)=0$;
- (6) 偶函数的图像关于 y 轴对称, 而奇函数的图形关于原点对称.

例 7. 判断 $f(x) = x \sin x$ 的奇偶性.

解: 由题可知, $f(x)$ 定义域为 $(-\infty, +\infty)$,

且 $f(-x) = (-x) \sin(-x) = x \sin x$, 所以 $f(x) = f(-x)$,

故 $f(x) = x \sin x$ 为偶函数.



例 8. 下列为偶函数的是 ().

$$A. y = \ln \frac{1-x}{1+x}$$

$$B. y = x^2 + \sin x$$

$$C. y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$D. y = |x|$$

解: D 项: 函数定义域为 $(-\infty, +\infty)$,

$$\text{令 } y = f(x) = |x|, \text{ 则 } f(-x) = |-x| = |x|,$$

显然 $f(x) = f(-x)$, 故 $y = |x|$ 是偶函数,

故本题答案为 D 项.

$$A \text{ 项: 函数定义域需满足 } \begin{cases} \frac{1-x}{1+x} > 0 \\ 1+x \neq 0 \end{cases}, \text{ 即解得 } \begin{cases} -1 < x < 1 \\ x \neq -1 \end{cases},$$

综上, 函数 $y = \ln \frac{1-x}{1+x}$ 定义域为 $(-1, 1)$;

$$\text{令 } y = f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}, \text{ 所以 } f(-x) = \ln \frac{1+x}{1-x} = -\ln \frac{1-x}{1+x},$$

故 $f(x) = -f(-x)$, 所以 $y = \ln \frac{1-x}{1+x}$ 为奇函数, 故排除.

B 项: 函数定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 令 $y = f(x) = x^2 + \sin x$,

$$\text{则 } f(-x) = (-x)^2 + \sin(-x) = x^2 - \sin x,$$

显然 $f(x) \neq f(-x)$, $f(x) \neq -f(-x)$,

所以 $y = x^2 + \sin x$ 为非奇非偶函数, 故排除.

C 项: 函数 $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ 定义域为 $(-\infty, +\infty)$,

$$\text{令 } y = f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \text{ 则 } f(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2},$$

故 $f(x) = -f(-x)$, 所以 $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ 为奇函数, 故排除.



本题答案为 D 项.

例 9. $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义, 下列为偶函数的是 ().

A. $f(x) - f(-x)$

B. $f(x) + f(-x)$

C. $xf(x)$

D. $xf(x^2)$

解: B 项: 由题可知, 因为 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义,

令 $F(x) = f(x) + f(-x)$, 则 $F(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上也有定义,

且 $F(-x) = f(-x) + f(x)$, 即 $F(x) = F(-x)$,

则 $f(x) + f(-x)$ 为偶函数, 故本题答案为 B 项.

A 项: 由题可知, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义,

令 $F(x) = f(x) - f(-x)$, 则 $F(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上也有定义,

且 $F(-x) = f(-x) - f(x) = -[f(x) - f(-x)]$,

即 $F(x) = -F(-x)$, 则 $f(x) - f(-x)$ 为奇函数, 故排除.

C 项: 由题可知, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义, 令 $F(x) = xf(x)$,

则 $F(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上也有定义, 且 $F(-x) = -xf(-x)$,

即 $F(x)$ 与 $F(-x)$ 无关, 则 $xf(x)$ 为非奇非偶的函数, 故排除.

D 项: 由题可知, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义,

令 $F(x) = xf(x^2)$, 则 $F(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上也有定义,

且 $F(-x) = -xf(-x)^2 = -xf(x^2)$, 即 $F(x) = -F(-x)$,

则 $xf(x^2)$ 为奇函数, 故排除.

故本题答案为 B 项.

3. 有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 数集 $X \subset D$, 如果存在正数 M , 使得 $|f(x)| \leq M$ 对任意 $x \in X$ 都成立, 则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界; 如果这样的 M 不存在, 就称函数 $f(x)$ 在 X 上无界.



注：(1) 我们这里只讨论有界无界的问题而不区分上界和下界，由上述定义不难看出，如果正数 M 是函数 $f(x)$ 的一个界，则比 M 大的数都是函数 $f(x)$ 的界。

(2) 常见的有界函数有： $\sin x, \cos x, \arcsin x, \arccos x, \arctan x, \operatorname{arccot} x$ 。

4. 周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D ，如果存在一个正数 T ，使得对于任意 $x \in D$ 有 $(x \pm T) \in D$ ，且 $f(x+T) = f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为周期函数， T 称为 $f(x)$ 的周期，通常所说周期函数的周期是指最小正周期。

例如：函数 $\sin x, \cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数，函数 $\tan x, \cot x$ 是以 π 为周期的周期函数。

三、反函数

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为集合 A ，其值域为 B ，如果对于 B 中的每一个元素，在集合 A 中都有唯一确定的 x 与之对应，则说在集合 B 上定义了一个函数，称该函数为 $y = f(x)$ 的反函数。记作

$$x = f^{-1}(y), \quad y \in B.$$

常将 $y = f(x)$ 的反函数 $x = f^{-1}(y)$ 写成 $y = f^{-1}(x)$ 。

注：(1) 在某一区间上单调的函数一定有反函数，其反函数的单调性与原函数一致；

(2) 函数 $y = f(x)$ 与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称。

(3) 反函数求解步骤

原函数 $y = f(x)$ $\xrightarrow{\text{反解 } x}$ 得到一个以 y 为自变量的反函数 $\xrightarrow{\text{调换 } x \text{ 和 } y}$ 反函数 (定义域)。

例 10. 求函数 $y = 1 + x^2, x \in (-\infty, 0]$ 的反函数。

解：由题可知， $y = 1 + x^2$ 的值域为 $[1, +\infty)$ ，

反解 x 得 $x = \pm\sqrt{y-1}$ ，因为 $x \in (-\infty, 0]$ ，所以 $x = -\sqrt{y-1}$ ，

故反函数为 $y = -\sqrt{x-1}, x \in [1, +\infty)$ 。



例 11. 求函数 $y = 2 \sin 3x$, $\left(-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{6}\right)$ 的反函数.

解: 由题可知, $y = 2 \sin 3x$ 的值域为 $[-2, 2]$,

$$\text{反解 } x \text{ 得 } x = \frac{1}{3} \arcsin \frac{y}{2},$$

$$\text{所以反函数为 } y = \frac{1}{3} \arcsin \frac{x}{2}, \quad x \in [-2, 2].$$

四、各大类函数分类

(一) 初等函数

1. 基本初等函数

(1) **幂函数**: 标准型 $y = x^a$ ($a \in R$ 是常数).

如 $y = x^2$, $y = x$, $y = x^{-1}$ 等均为幂函数, 常见幂函数图像如下图 1-1.

幂函数的运算性质: $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$, $\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$, $x^{\frac{a}{b}} = \sqrt[b]{x^a}$, $(x^a)^b = x^{ab}$.

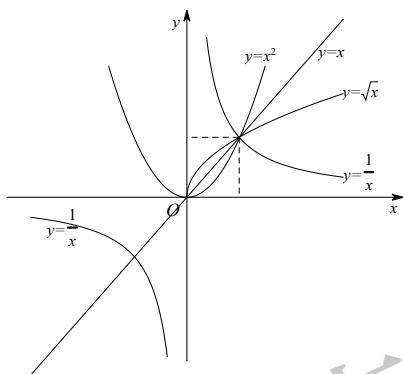


图 1-1

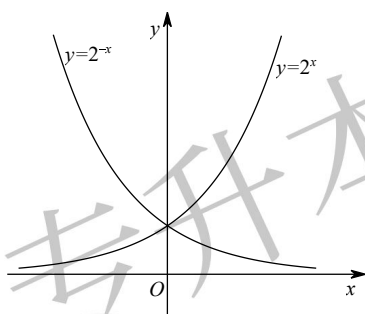


图 1-2

(2) **指数函数**: 标准型 $y = a^x$ (a 为常数, $a > 0$ 且 $a \neq 1$), 其定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $(0, +\infty)$.

例如 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y = 3^x$ 等均为指数函数, 常见指数函数图像如上图 1-2.



指数函数的运算性质: $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$, $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$, $(a^x)^y = a^{xy}$, $(ab)^x = a^x b^x$.

(3) **对数函数**: 标准型 $y = \log_a x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$, 特别地, 当 $a = e$ 时, 记为 $y = \ln x$), 其定义域为 $(0, +\infty)$, 值域为 $(-\infty, +\infty)$.

如 $y = \log_2 x$, $y = \lg x$ 等均为对数函数, 常见对数函数图像如下图 1-3.

对数函数的运算性质:

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y,$$

$$\ln x^y = y \ln x, \quad \ln e^N = e^{\ln N} = N.$$

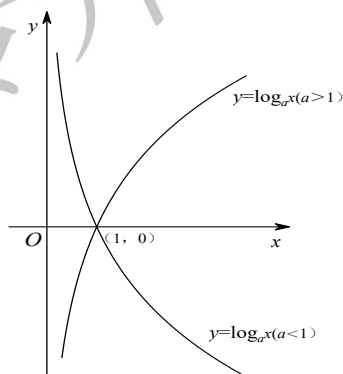


图 1-3

(4) **三角函数**:

① 正弦函数 $y = \sin x$, 余弦函数 $y = \cos x$, 如下图 1-4 所示.

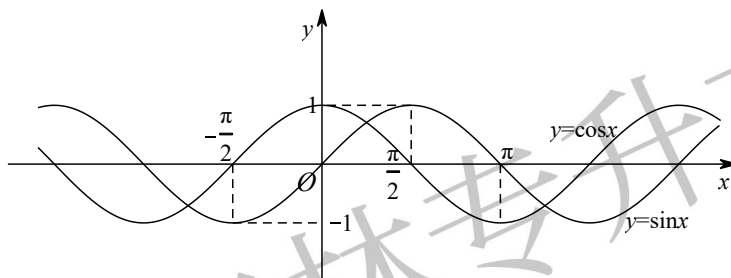


图 1-4

② 正切函数 $y = \tan x$, 余切函数 $y = \cot x$, 如下图 1-5 所示.



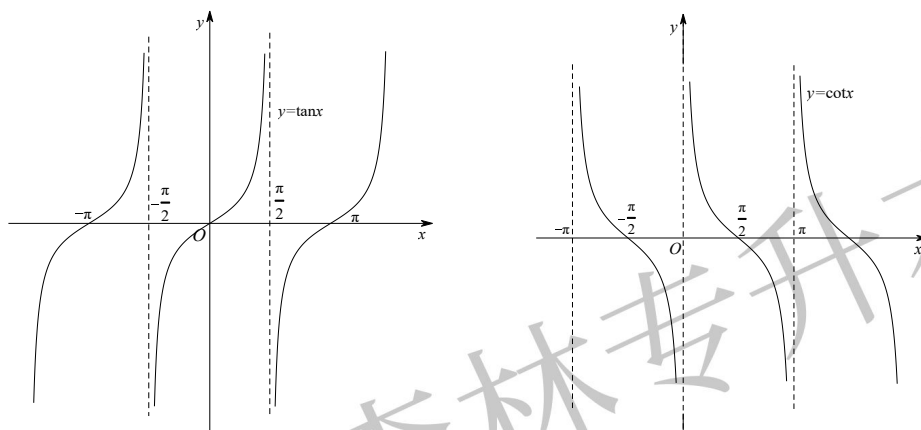


图 1-5

③正割函数 $y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$ ，余割函数 $y = \csc x = \frac{1}{\sin x}$ 。

④常见的三角函数值（如下表 1-2）：

表 1-2 常见三角函数值

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	不存在	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\cot x$	不存在	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	不存在

注：三角函数常用的公式

平方和公式

① $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ② $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$ ③ $\cot^2 x + 1 = \csc^2 x$

倒数关系



① $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

② $\cot x = \frac{1}{\tan x}$

③ $\sec x = \frac{1}{\cos x}$

④ $\csc x = \frac{1}{\sin x}$

倍角与降幂公式

① $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

② $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$

③ $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$

④ $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$

(5) 反三角函数:

① 反正弦函数 $y = \arcsin x$ 是由正弦函数 $y = \sin x$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的一段定义的反函数, 故其定义域为 $[-1, 1]$, 值域为 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, 如下图 1-7 所示.

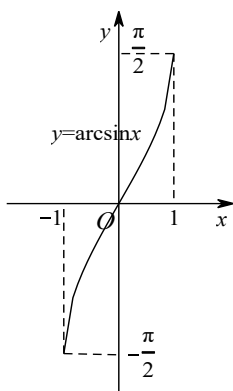


图 1-7

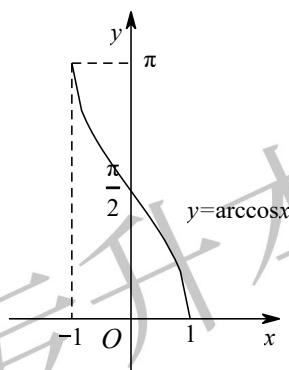


图 1-8

② 反余弦函数 $y = \arccos x$ 是由余弦函数 $y = \cos x$ 在区间 $[0, \pi]$ 上的一段定义的反函数, 故其定义域为 $[-1, 1]$, 值域为 $[0, \pi]$, 如上图 1-8 所示.

③ 反正切函数 $y = \arctan x$ 是由余弦函数 $y = \tan x$ 在区间 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上的一段定义的反函数, 故其定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, 如下图 1-9 所示.



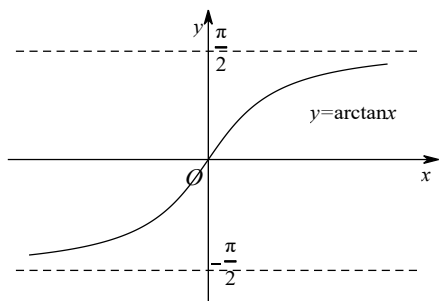


图 1-9

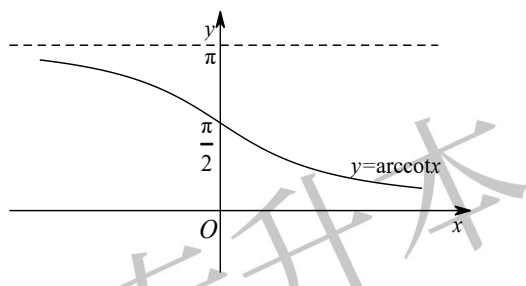


图 1-10

④反正切函数 $y = \operatorname{arccot} x$ 是由余弦函数 $y = \cot x$ 在区间 $(0, \pi)$ 上的一段定义的反函数，故其定义域为 $(-\infty, +\infty)$ ，值域为 $(0, \pi)$ ，如上图 1-10 所示。

2. 复合函数

设函数 $y = f(u)$ 的定义域是 D_f ，函数 $u = g(x)$ 的定义域是 D_g ，值域是 R_g ，若 $R_g \subset D_f$ ，则由下式确定的函数

$$y = f[g(x)], x \in D_g$$

称为由函数 $u = g(x)$ 与函数 $y = f(u)$ 构成的**复合函数**，其中 u 称为中间变量， x 称为自变量。

注：并非任意两个函数都能复合，能复合的充要条件是 $D_f \cap R_g \neq \emptyset$ 。

如 $y = \arcsin u$ ， $u = x^2 + 2$ 不能构成复合函数。

例 12. 指出下列函数是由哪些简单函数复合而成的？

(1) $y = \ln(\sin e^{-x})$

(2) $y = \sin^2(e^{3x})$

(3) $y = \sqrt{x + \sqrt{x-1}}$

(4) $y = e^{(2x-1)^3}$

(5) $y = \arcsin(x-1)^5$

(6) $y = (x+1)^5$

解：(1) $y = \ln(\sin e^{-x})$ 是由 $y = \ln u$ ， $u = \sin v$ ， $v = e^w$ ， $w = -x$ 复合而成。

(2) $y = \sin^2(e^{3x})$ 是由 $y = u^2$ ， $u = \sin v$ ， $v = e^w$ ， $w = 3x$ 复合而成。

(3) $y = \sqrt{x + \sqrt{x-1}}$ 是由 $y = \sqrt{u}$ ， $u = x + \sqrt{x-1}$ 复合而成。

(4) $y = e^{(2x-1)^3}$ 是由 $y = e^u$ ， $u = v^3$ ， $v = 2x-1$ 复合而成。



(5) $y = \arcsin(x-1)^5$ 是由 $y = \arcsin u$, $u = v^5$, $v = x-1$ 复合而成.

(6) $y = (x+1)^5$ 是由 $y = u^5$, $u = x+1$ 复合而成.

3. 初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合运算所构成的并可用一个式子表示的函数, 称为**初等函数**.

例如: $y = \frac{1}{3x+1} - e^{2x}$, $y = (1-2x)^3 + \tan \frac{x+1}{3}$, $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) - 3$,

$y = \sin \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ 等都是初等函数. 初等函数是高等数学中的主要研究对象.

(二) 分段函数

由多个(两个或两个以上)解析式表示出来的一个函数, 称为分段函数.

注: 分段函数是一个函数将定义域分为多个段, 在每个段上有其相对应的法则.

如 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \geq 0 \\ x-1, & x < 0 \end{cases}$ 是由两个解析式表示的定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 的一个函数.

例 13. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \sin x, & -\frac{\pi}{2} < x < 0 \\ 2, & 0 \leq x \leq 1 \\ \ln(x-1), & 1 < x < 3 \end{cases}$, 求 $f[f(0)]$.

解: 因为 $f(0) = 2$, 所以 $f[f(0)] = f(2) = \ln(2-1) = 0$.

(三) 隐函数

设 x 在某数集 X 内每取一个值时, 由二元方程 $F(x, y) = 0$ 可唯一确定一个 y 的值, 则称由 $F(x, y) = 0$ 确定一个**隐函数**, 如 $e^{xy} + 3xy = 2$.

注: (1) 把一个隐函数化成显函数, 叫做隐函数的显化. 例如从方程 $x + y^3 - 1 = 0$ 解出 $y = \sqrt[3]{1-x}$, 就把隐函数化成了显函数. 但并非所有的隐函数都能显化, 隐函数的显化有时是非常困难的, 甚至是不可能的.

(2) 隐函数显化时, 得到的结果可能不是单值函数, 如 $x^2 + y^2 = 1$, $y = \pm\sqrt{1-x^2}$.



(四) 幂指函数

函数的底数和指数都含有变量的函数叫做**幂指函数**，结构形如 $y = u(x)^{v(x)}$ ， $u(x) > 0$ ，例如： $y = x^{\sin x}$ 。

注：求幂指函数的极限、导数等问题，一般处理方法是“指数对数化”，即

$$u(x)^{v(x)} = e^{v(x)\ln u(x)}.$$

(五) 参数方程

结构形如 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ (t 为参数)，确定的函数 $y = f(x)$ 叫做函数的**参数方程**。如

$\begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases}$ 表示的图形为圆心在原点，半径为 2 的圆。



第二节 极限

本节学习目标

1. 理解极限的概念及性质，掌握极限的运算法则.
2. 理解无穷小量与无穷大量的概念及两者的关系，掌握无穷小量的性质和无穷小量的比较.
3. 了解夹逼准则与单调有界准则，掌握两个重要极限： $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ， $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

一、数列的极限

若按照某一法则，对每个 $n \in \mathbf{N}_+$ ，对应着一个确定的实数 a_n ，这些实数 a_n 按照下标 n 从小到大排列得到的一个序列

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \dots$$

就叫做数列，简记为数列 $\{a_n\}$. 数列中的每一个数叫做数列的项，第 n 项 a_n 叫做数列的一般项（或通项）.

如：

$$1, -1, 1, \dots, (-1)^{n+1}, \dots;$$

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots;$$

$$2, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{3}, \dots, 1 + \frac{1}{n}, \dots.$$

都是数列的例子，它们的一般项依次为

$$(-1)^{n+1}, \frac{n}{n+1}, 1 + \frac{1}{n}.$$

若 $\exists$ 常数 A ，当 $n \rightarrow +\infty$ 时，有 $a_n \rightarrow A$ ，则称 A 为 $n \rightarrow +\infty$ 时，数列 a_n 的极限，记作 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = A$.

若数列 $\{a_n\}$ 的极限存在，则称数列 $\{a_n\}$ 收敛，若数列 $\{a_n\}$ 的极限不存在，则称数列 $\{a_n\}$ 发散.

例 1. 下列各题中，哪些数列收敛，哪些数列发散？对收敛数列，通过观察 a_n 的变化



趋势，写出它们的极限.

$$(1) \left\{ \frac{1}{2^n} \right\};$$

$$(2) \left\{ 2 + \frac{1}{n^2} \right\};$$

$$(3) \left\{ \frac{n-1}{n+1} \right\};$$

$$(4) \left\{ \frac{n+1}{n^2-1} \right\}.$$

解: (1) 原式 = $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0.$

(2) 原式 = $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{n^2} \right) = 2.$

(3) 原式 = $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-1}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1-2}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{n+1} \right) = 1.$

(4) 原式 = $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n^2-1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{(n+1)(n-1)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n-1} = 0.$

注: 在还未介绍求极限的方法时, 我们可以通过数形结合的方法来观察函数曲线的走势判断其极限, 这也是一种计算极限的方法.

二、函数的极限

1. 自变量 x 趋近有限值时的函数极限

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域内有定义, 如果存在常数 A , 当自变量 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)$ 无限接近 A , 则常数 A 就叫做函数当 $x \rightarrow x_0$ 时的极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A.$$

由于存在分段函数等原因, 我们会遇到下列情形:

(1) 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域内有定义, 如果存在常数 A , 当自变量 $x > x_0$ 且无限接近 x_0 时, $f(x)$ 无限接近 A , 则常数 A 就叫做函数当 $x \rightarrow x_0$ 时的右极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A \text{ 或 } f(x_0 + 0) = A.$$

(2) 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域内有定义, 如果存在常数 A , 当自变量



$x < x_0$ 且无限接近 x_0 时, $f(x)$ 无限接近 A , 则常数 A 就叫做函数当 $x \rightarrow x_0$ 时的左极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A \text{ 或 } f(x_0 - 0) = A.$$

左极限与右极限统称**单侧极限**, 当 $x \rightarrow x_0$ 时函数 $f(x)$ 极限存在的充要条件是左右极限都存在并且相等, 即

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A.$$

例 2. 设 $f(x) = \begin{cases} x+2, & x < 0 \\ \pi, & x = 0 \\ \ln(1+x), & x > 0 \end{cases}$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

解: 因为 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x+2) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(1+x) = 0$,

显然 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在.

注: 极限的计算方法, 后面会详讲.

2. 自变量 x 趋于无穷大时函数的极限

设函数 $f(x)$, $x > 0$, 当 x 充分大以后有定义, 如果存在常数 A , 当自变量 x 无限增大时, $f(x)$ 无限逼近于这个常数 A , 则称常数 A 是函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow +\infty$ 时的极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A.$$

如 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} = 0$.

设函数 $f(x)$, $x < 0$, 当 x 充分大以后有定义, 如果存在常数 A , 当自变量 x 无限增大时, $f(x)$ 无限逼近于这个常数 A , 则称常数 A 是函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow -\infty$ 时的极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A.$$

如 $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.



设函数 $f(x)$, 当 x 的绝对值充分大以后有定义, 如果存在常数 A , 当自变量 x 绝对值无限增大时, $f(x)$ 无限接近 A , 常数 A 就叫做函数当 x 趋于无穷时的极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A.$$

注: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A.$

例 3. 判断下列函数当 $x \rightarrow \infty$ 时的极限是否存在.

(1) $y = \cos x$ (2) $y = \arctan x$ (3) $y = e^{-x}$

解: (1) 因为 $\cos x$ 是一个有界函数, 函数值介于 $[-1, 1]$,

所以 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \cos x$ 极限值也都介于 $[-1, 1]$, 故 $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos x$ 极限不存在.

(2) 因为 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$,

显然 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x \neq \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x$, 故 $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x$ 不存在.

(3) 因为 $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$,

显然 $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} \neq \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x}$, 故 $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x}$ 不存在.

三、极限的四则运算

如果 $\lim f(x) = A$, $\lim g(x) = B$, 则有

(1) $\lim [f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B$;

(2) $\lim [f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = A \cdot B$;

(3) $\lim [cf(x)] = c \lim f(x)$, 其中 c 为常数;

(4) $\lim [f(x)]^n = [\lim f(x)]^n$, 其中 n 为正整数;

(5) $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B}$, 其中 $\lim g(x) \neq 0$.

例 4. 计算 $\lim_{x \rightarrow 1} (3x+1)$.



解: 原式 = $\lim_{x \rightarrow 1} 3x + \lim_{x \rightarrow 1} 1 = \lim_{x \rightarrow 1} (3 \times 1) + 1 = 3 + 1 = 4$.

例 5. 计算 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 5x + 3}$.

解: 原式 = $\frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 1)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 5x + 3)}$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow 2} x^3 - \lim_{x \rightarrow 2} 1}{\lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 5 \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 3}$$

$$= \frac{2^3 - 1}{2^2 - 10 + 3} = -\frac{7}{3}.$$

例 6. 计算 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$.

解: 原式 = $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)(x-2)}{(x+2)(x-2)}$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1}{x+2}$$

$$= \frac{1}{4}.$$

注: 此方法利用基本代数运算中的因式分解, 消去零因子, 以后在计算极限时能化简一定先化简, 能简化计算.

例 7. 计算 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 3x^2 + 1}{3x^3 + 4x^2 - 7}$.

解: 原式 = $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 3x^2 + 1}{3x^3 + 4x^2 - 7}$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}}{3 + \frac{4}{x} - \frac{7}{x^3}} = \frac{4}{3}.$$


例 8. 计算 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 - x - 1}{x^3 - 3x^2 + 2}$.

解: 原式 = $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{7x^2 - x - 1}{x^3}}{\frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{7}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}}{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^3}} = 0$.

例 9. 计算 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 - 3x^2 - 1}{3x^2 - x - 1}$.

解: 原式 = $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{6x^3 - 3x^2 - 1}{x^3}}{\frac{3x^2 - x - 1}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 - \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}}{\frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}} = \infty$.

例 7、例 8 和例 9 是下列一般情形的特例, 即当 $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$, m 和 n 为非负整数时, 有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n} = \begin{cases} 0, & \text{当 } n > m, \\ \frac{a_0}{b_0}, & \text{当 } n = m, \\ \infty, & \text{当 } n < m, \end{cases}$$

这类题型主要解决的是 $x \rightarrow \infty$ 且是 “ $\frac{\infty}{\infty}$ ” 型未定式时使用, 在上述 3 个例子中采用的是分子分母同时除以最高次幂计算, 这类方法也称为“抓大头”, 为了计算简便, 记住以上结论直接使用即可.

例 10. 计算 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x} + 3x}{x^2 + 2x + 1}$.

解: 原式 = $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{1}{3}} + 3x}{x^2 + 2x + 1} = 0$.



例 11. 计算 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1})$.

$$\begin{aligned} \text{解: 原式} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1})}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}} = 0. \end{aligned}$$

例 12. 计算 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 1}{\pi^x - 3}$.

$$\begin{aligned} \text{解: 原式} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{e^x + 1}{\pi^x}}{\frac{\pi^x - 1}{\pi^x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{e}{\pi}\right)^x + \left(\frac{1}{\pi}\right)^x}{1 - \left(\frac{1}{\pi}\right)^x} = 0. \end{aligned}$$

四、极限存在准则

准则一：夹逼准则

1. 如果数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ 满足下列条件

(1) 从某项起, 即存在 $n_0 \in N_+$, 当 $n > n_0$ 时, 有 $a_n \leq b_n \leq c_n$;

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$.

那么数列 $\{b_n\}$ 的极限存在, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$.

准则二：单调有界准则

如果数列 $\{a_n\}$ 满足条件

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \cdots,$$

就称数列 $\{a_n\}$ 是单调增加的; 如果数列 $\{a_n\}$ 满足条件

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \cdots,$$



就称数列 $\{a_n\}$ 是**单调减少**的. 单调增加和单调减少的数列统称为**单调数列**.

单调有界数列必有极限 (单调递增有上界, 单调递减有下界).

注: 单调有界准则只适用于数列, 不适用于一般函数, 如函数

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & 0 \leq x \leq 1 \\ x-1, & -1 < x < 0 \end{cases} \text{ 是单调有界函数, 但在 } x=0 \text{ 处无极限.}$$

例 13. 计算 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\frac{1}{n^2 + \pi} + \frac{1}{n^2 + 2\pi} + \cdots + \frac{1}{n^2 + n\pi} \right)$.

解: 设 $y_n = n \left(\frac{1}{n^2 + \pi} + \frac{1}{n^2 + 2\pi} + \cdots + \frac{1}{n^2 + n\pi} \right)$, 因为

$$n \left(\frac{1}{n^2 + n\pi} + \frac{1}{n^2 + n\pi} + \cdots + \frac{1}{n^2 + n\pi} \right) \leq y_n \leq n \left(\frac{1}{n^2 + \pi} + \frac{1}{n^2 + \pi} + \cdots + \frac{1}{n^2 + \pi} \right),$$

$$\text{即 } \frac{n^2}{n^2 + n\pi} \leq n \left(\frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \right) \leq \frac{n^2}{n^2 + \pi},$$

$$\text{又因为 } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n^2 + n\pi} = 1, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n^2 + \pi} = 1,$$

$$\text{所以由夹逼准则可得 } \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\frac{1}{n^2 + \pi} + \frac{1}{n^2 + 2\pi} + \cdots + \frac{1}{n^2 + n\pi} \right) = 1.$$

五、两个重要极限

1. 第一重要极限

第一重要极限的常见形式形如 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 或 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = 1$;

推广形式 $\lim_{\varphi(x) \rightarrow 0} \frac{\sin \varphi(x)}{\varphi(x)} = 1$, 式中不管自变量 x 的变化趋势如何, 只要在自变量

的变化趋势下 $\varphi(x) \rightarrow 0$ ($\varphi(x) \rightarrow 0^+$ 或 $\varphi(x) \rightarrow 0^-$ 时亦可)即可.

2. 第二重要极限

第二重要极限的常见形式形如 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ 或 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$;



推广形式 $\lim_{\varphi(x) \rightarrow 0} [1 + \varphi(x)]^{\frac{1}{\varphi(x)}} = e$ ($\varphi(x) \rightarrow 0^+$ 或 $\varphi(x) \rightarrow 0^-$ 时亦成立) 或

$$\lim_{\varphi(x) \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{\varphi(x)} \right]^{\varphi(x)} = e \quad (\varphi(x) \rightarrow +\infty \text{ 或 } \varphi(x) \rightarrow -\infty \text{ 时亦成立}).$$

例 14. 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$.

解: 原式 = $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x \cos x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1.$$

例 15. 计算 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2-1}$.

解: 原式 = $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x-1} \cdot \frac{1}{x+1}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x-1} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}.$$

例 16. 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{15x}$.

解: 原式 = $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{5} \cdot \frac{\sin 3x}{3x} = \frac{1}{5}.$

例 17. 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} x \cot x$.

解: 原式 = $\lim_{x \rightarrow 0} x \frac{1}{\tan x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1.$$

例 18. 计算 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^x$.



解：原式 = $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-x \cdot (-1)} = e^{-1}.$

例 19. 计算 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+1}.$

解：原式 = $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-4}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{-4} \cdot \frac{-4}{x+3} \cdot (x+1)}$
 $= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4(x+1)}{x+3}} = e^{-4}.$

例 20. 计算 $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}.$

解：原式 = $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2+x-2}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$
 $= \lim_{x \rightarrow 2} \left(1 + \frac{x-2}{2}\right)^{\frac{2}{x-2} \cdot \frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}}.$

例 21. 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{\sin x}}.$

解：原式 = $\lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{2x} \cdot 2x \cdot \frac{1}{\sin x}}$
 $= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin x}} = e^2.$

例 22. 设 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2a}{x-a}\right)^x = 8$, 求 a .

解：因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2a}{x-a}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-a+3a}{x-a}\right)^x$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3a}{x-a}\right)^x$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{3a} \cdot \frac{3a}{x-a} \cdot x}$



$$= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3ax}{x-a}} = e^{3a} = 8,$$

所以 $a = \ln 2$.

六、无穷小量与无穷大量

1. 无穷小量

如果函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的极限为零, 则称函数 $f(x)$ 为当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的**无穷小量**, 简称无穷小.

注: 无穷小不能与一个很小很小的常数混为一谈, 0 是唯一可以作为无穷小的常数.

2. 无穷小的性质

- (1) 有限个无穷小的和、差、积还是无穷小;
- (2) 常数与无穷小的乘积是无穷小;
- (3) **有界函数**与无穷小的乘积是无穷小.

3. 无穷大量

如果当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时, 函数 $f(x)$ 的绝对值无限增大, 那么称函数 $f(x)$ 为当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的**无穷大量**, 简称无穷大.

4. 无穷小量与无穷大量的关系

在自变量的同一变化过程中, 如果 $f(x)$ 为无穷大, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小; 反之, 如果 $f(x)$ 为无穷小且 $f(x) \neq 0$, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

例 23. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列变量为无穷小量的是 ().

- A. $\sin \frac{1}{x}$ B. $\cos x$ C. $\sin \frac{x}{2}$ D. $\arccos x$

解: C 项: 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{x}{2} = 0$, 所以当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin \frac{x}{2}$ 是无穷小量, 故 C 项正确.

A 项: $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ 显然为有界变量, 故排除.

B 项: 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1 \neq 0$, 所以当 $x \rightarrow 0$ 时, $\cos x$ 不是无穷小量, 故排除.



D 项: 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \arccos x = \frac{\pi}{2} \neq 0$, 所以 $x \rightarrow 0$ 时, $\arccos x$ 不是无穷小量, 故排除.

故本题答案为 C 项.

例 24. 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$.

解: 因为 $x \rightarrow 0$, $\sin \frac{1}{x}$ 是有界函数, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$.

例 25. 计算 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 + 1} (2 + \cos x)$.

解: 因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 + 1} = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} (2 + \cos x)$ 为有界函数,

故由 $0 \times$ 有界量为无穷小得 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 + 1} (2 + \cos x) = 0$.

例 26. 计算 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^3 - 2x + 5)(1 + \cos x - 2 \sin x)}{2x^4 + x - 25}$.

解: 原式 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x + 5}{2x^4 + x - 25} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \cos x - 2 \sin x)$,

显然 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x + 5}{2x^4 + x - 25} = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \cos x - 2 \sin x)$ 为有界量,

故 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^3 - 2x + 5)(1 + \cos x - 2 \sin x)}{2x^4 + x - 25} = 0$.

5. 无穷小量的比较

设 α, β 均为自变量同一趋向下的无穷小, 且 $\alpha \neq 0$,

(1) 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, 则称 β 是比 α 的高阶无穷小, 记作 $\beta = o(\alpha)$;

(2) 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$, 则称 β 是比 α 的低阶的无穷小;

(3) 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$, 则称 β 与 α 是同阶无穷小;



(4) 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$, 则称 β 与 α 是等价无穷小, 记作 $\alpha \sim \beta$.

6. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 常用的等价无穷小量如下

$$(1) \sin x \sim x;$$

$$(2) \tan x \sim x;$$

$$(3) \arcsin x \sim x;$$

$$(4) \arctan x \sim x;$$

$$(5) e^x - 1 \sim x;$$

$$(6) \ln(1+x) \sim x;$$

$$(7) \sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{n}x;$$

$$(8) 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2;$$

$$(9) x - \sin x \sim \frac{1}{6}x^3;$$

$$(10) \tan x - x \sim \frac{1}{3}x^3;$$

$$(11) \tan x - \sin x \sim \frac{1}{2}x^3.$$

注: (1) 以上等价无穷小量, 都有对应的推广形式, 如 $\varphi(x) \rightarrow 0$ 时,

$$\sin \varphi(x) \sim \varphi(x), \tan \varphi(x) \sim \varphi(x), \arcsin \varphi(x) \sim \varphi(x) \text{ 等.}$$

(2) 等价无穷小只有当它作为乘积因子或者商的形式时才能替换, 在和、差项中不能等价替换.

例 27. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列各无穷小量与 x 相比是高阶无穷小量的是 ().

$$A. 2x^2 + x$$

$$B. \sin x^2$$

$$C. x + \sin x$$

$$D. x^2 + \sin x$$

解: B 项: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0$, 故当 $x \rightarrow 0$ 时,

$\sin x^2$ 是 x 的高阶无穷小量, 故 B 项正确.

A 项: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (2x + 1) = 1$, 故当 $x \rightarrow 0$ 时,

$2x^2 + x$ 是 x 的等价无穷小量.

C 项: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\sin x}{x} \right) = 2$, 故当 $x \rightarrow 0$ 时,

$x + \sin x$ 是 x 的同阶非等价无穷小量.



$$D \text{ 项: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x + \frac{\sin x}{x} \right) = 1,$$

故当 $x \rightarrow 0$ 时, $x^2 + \sin x$ 是 x 的等价无穷小量.

故本题答案为 B 项.

$$\text{例 28. 计算 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x(\sqrt{1+x}-1)}{\tan^2 3x}.$$

$$\text{解: 原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \times \frac{1}{2}x}{(3x)^2} = \frac{1}{9}.$$

$$\text{例 29. 计算 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}.$$

$$\text{解: 原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{-\frac{1}{2}x^2} = -2.$$

$$\text{例 30. 计算 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{\sin(\tan x)}.$$

$$\text{解: 原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1.$$

$$\text{例 31. 计算 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)(\sqrt{1+\sin x}-1)}.$$

$$\begin{aligned} \text{解: (法一) 原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x(\cos x - 1)}{\frac{1}{3}x^2 \cdot \frac{1}{2}\sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \times \left(-\frac{1}{2}x^2\right)}{\frac{1}{6}x^3} = -3. \end{aligned}$$

$$\text{(法二) 原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(\tan x - \sin x)}{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)(\sqrt{1+\sin x}-1)}$$



$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^3}{\frac{1}{3}x^2 \cdot \frac{1}{2}\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^3}{\frac{1}{6}x^3} = -3.$$

注: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)(\sqrt{1+\sin x}-1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-x}{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)(\sqrt{1+\sin x}-1)} = 0$ 是错误的,

因为等价无穷小只能在乘积因子或商当中才能替换.

七、求极限的方法总结

到此为止, 极限的计算除洛必达法则以外, 其余方法均已介绍, 下面就本节所学做如下归纳总结:

1. 消零因子法 (适用于 $x \rightarrow x_0$ 时, $\frac{0}{0}$ 型)

例 32. 计算 $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{x^2-3x-4}$.

解: 原式 $= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{(x-4)(x+1)}$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{5}.$$

例 33. 计算 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$.

解: 原式 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{(x+1)(x-1)}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x+1} = 0.$$

2. 有理化法 (适用于带无理根式的极限问题)

例 34. 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$.

解: 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})}{(\sqrt{x+2}-\sqrt{2})(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})}$



$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x(\sqrt{x+2} + \sqrt{2})}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} 4(\sqrt{x+2} + \sqrt{2}) = 8\sqrt{2}.$$

3. 通分法（适用于“ $\infty - \infty$ ”）（常结合洛必达法则使用）

例 35. 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{12}{x^3-8} \right)$.

解：原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x + 4 - 12}{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-2)(x+4)}{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+4}{x^2 + 2x + 4} = 1.$$

4. 等价无穷小的替换

例 36. 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arctan x^2}{x \ln(1+3x)}$.

解：原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{3x^2} = \frac{2}{3}.$

5. 利用左右极限求分段函数在分段点的极限

例 37. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x < 0 \\ 1 - e^x, & x \geq 0 \end{cases}$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

解： $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + 2) = 2$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - e^x) = 0$,

显然 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, 故 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 极限不存在.

注：对于分段函数而言，极限存在的充要条件为左极限等于右极限等于一个常数，即

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = A.$$



第三节 连续与间断

本节学习目标

1. 理解函数连续与间断的定义，理解函数间断点的分类，会利用连续性求极限，会判别函数间断点的类型.
2. 理解闭区间上连续函数的有界性定理、最值定理、介值定理，并会用上述定理推证一些简单命题.

一、函数的连续性

1. 连续的定义

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义，如果

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0),$$

则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 连续，否则称 x_0 为 $f(x)$ 的间断点.

注：函数在某点连续必须同时具备下列条件：

- (1) $f(x)$ 在点 x_0 处有定义，即 $f(x_0)$ 存在；
- (2) 极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在；
- (3) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

2. 左连续与右连续

如果 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 极限存在，且等于 $f(x_0)$ ，即

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0),$$

那么就说函数 $f(x)$ 在点 x_0 左连续. 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 极限存在，且等于 $f(x_0)$ ，即

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0),$$

那么就说函数 $f(x)$ 在点 x_0 右连续.

函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续的充要条件是函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处左连续且右连续，即



$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

注：一切初等函数在其定义区间内都是连续的。

例 1. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} e^{3x}, & x < 0, \\ 1, & x = 0, \\ \cos x, & x > 0. \end{cases}$ 在 $x=0$ 处是否连续？

解：由题可知， $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{3x} = 1$,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x = 1, \quad f(0) = 1,$$

$$\text{显然 } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0),$$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

例 2. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \sin x, & x < 0, \\ k, & x = 0, \\ x \sin \frac{1}{x} + 1, & x > 0. \end{cases}$ 试确定常数 k 的值，使 $f(x)$ 在定义域内连续。

解：由题意可知， $f(x)$ 在定义域内连续，所以 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$,

$$\text{又因为 } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} \sin x = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} x = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x \sin \frac{1}{x} + 1 \right) = 1, \quad f(0) = k,$$

所以 $k = 1$ 。

二、函数的间断点

1. 定义

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义，如果函数有下列三种情形之一。

- (1) 在 $x = x_0$ 处没有定义；
- (2) 虽在 $x = x_0$ 处有定义，但 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在；



(3) 虽在 $x = x_0$ 处有定义, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 但 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$,

则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续, 而点 x_0 称为函数 $f(x)$ 的不连续点或间断点.

2. 分类

(1) 第一类间断点

设点 x_0 是函数的间断点, 如果函数在点 x_0 处的左右极限都存在, 则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的第一类间断点.

如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$, 但函数 $f(x)$ 在点 x_0 处无定义或者极限值不等于函数值时, 称 x_0 为函数 $f(x)$ 的可去间断点 (如下图 3-1 所示).

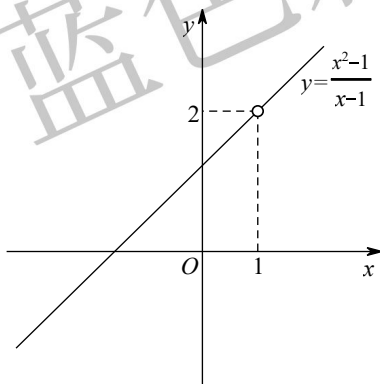


图 3-1

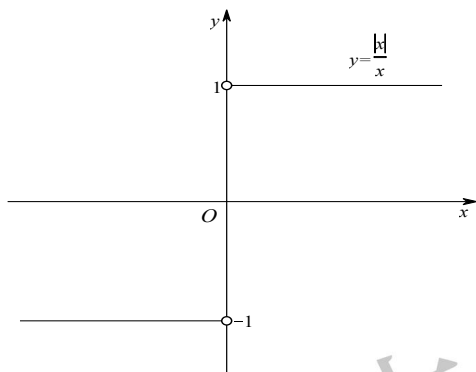


图 3-2

如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处左右极限都存在, 但是不相等, 称 x_0 为函数 $f(x)$ 的跳跃间断点 (如上图 3-2 所示).

(2) 第二类间断点

不是第一类间断点的任何间断点 (左极限和右极限至少有一个不存在), 称为第二类间断点. 常见的第二类间断点有无穷间断点和振荡间断点.

如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处左右极限至少有一个为无穷大, 称 x_0 为函数 $f(x)$ 的无穷间断点 (如下图 3-3 所示).



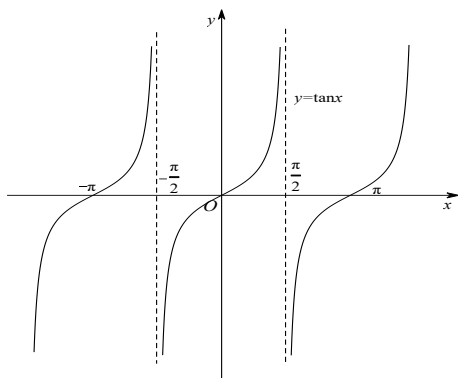


图 3-3

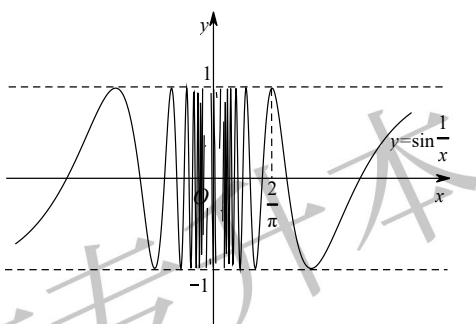


图 3-4

如果函数 $f(x)$ 的值在某个区间来回波动, 称 x_0 为函数 $f(x)$ 的振荡间断点 (如上图 3-4 所示).

注: 初等函数无定义的点一定是间断点, 而分段函数的分段点疑是间断点, 需要用连续的充要条件去判断.

例 3. 讨论函数 $f(x) = \frac{x^2 - 1}{(x-1)x}$ 的间断点.

解: 由题意可知, $f(x)$ 无定义的点为 $x=1$, $x=0$,

$$\text{显然 } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{(x-1)x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x} = 2,$$

故 $x=1$ 为函数 $f(x)$ 的可去间断点.

$$\text{又因为 } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{x} = \infty,$$

故 $x=0$ 为函数 $f(x)$ 的无穷间断点.

例 4. 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}$ 的间断点.

解: 由题意可知, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x-1) = -1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1) = 1$,



故 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ，但各自极限均存在，

所以 $x=0$ 为函数 $f(x)$ 的跳跃间断点.

例 5. 讨论函数 $f(x) = \frac{1}{e^x + 2}$ 的间断点并判断其类型.

解: 由题意可知, 函数无定义的点为 $x=0$, 且 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{e^x + 2} = \frac{1}{2}$,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^x + 2} = 0, \text{ 故 } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x),$$

所以 $x=0$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点.

三、闭区间上连续函数的性质

1. 最值定理

若 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在该区间上一定能取得最大值和最小值.

如 $f(x) = 2x + 1$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 则最大值为 $\max\{f(x)\} = 3$, 最小值为 $\min\{f(x)\} = 1$.

2. 有界性定理

若 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在该区间上一定有界.

如 $f(x) = 2 \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 则 $|f(x)| \leq 2$.

3. 零点定理

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号(即 $f(a) \cdot f(b) < 0$), 那么在开区间 (a, b) 内至少有一点 ξ , 使得 $f(\xi) = 0$ (如右图 3-5).

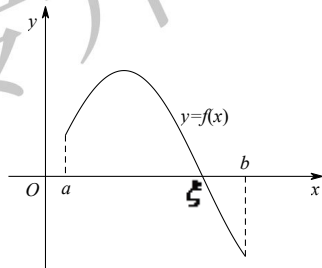


图 3-5

4. 介值定理

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a) = A, f(b) = B$ ($A \neq B$). 那么对



于 A 与 B 之间的任意一个数 C ，在开区间 (a, b) 内至少有一点 ξ ，使得 $f(\xi) = C$ ($a < \xi < b$)。

将最大值和最小值定理结合起来，容易得到以下推论。

推论： 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，且 $M = \max_{a \leq x \leq b} f(x)$, $m = \min_{a \leq x \leq b} f(x)$, $m \leq \mu \leq M$ ，则存在 $\xi \in [a, b]$ ，使得 $f(\xi) = \mu$ 。

注： 闭区间上连续函数的性质常结合微分中值定理与导数的应用考查。

例 6. 证明方程 $x^3 - 4x^2 + 1 = 0$ 在区间 $(0, 1)$ 内至少有一个根。

证明： 令 $f(x) = x^3 - 4x^2 + 1$ ，显然该函数在 $(0, 1)$ 上连续，

且 $f(0) = 1$, $f(1) = -2$ ，易得 $f(0) \cdot f(1) < 0$ ，

由零点定理可得 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上至少存在一个零点，

即 $x^3 - 4x^2 + 1 = 0$ 在区间 $(0, 1)$ 内至少有一个根。

例 7. 证明函数 $f(x) = e^x - x - 2$ 至少有一个根介于 0 和 2 之间。

证明： 由题可知，显然该函数在 $(0, 2)$ 上连续，

且 $f(0) = -1$, $f(2) = e^2 - 4$ ，易得 $f(0) \cdot f(2) < 0$ ，

由零点定理可得 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 上至少存在一个零点，

即函数 $f(x) = e^x - x - 2$ 至少有一个根介于 0 和 2 之间。

例 8. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，其中 $a \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq b$ ，证明：在闭区间

$[a, b]$ 上必存在一点 ξ ，使得 $f(\xi) = \frac{f(x_1) + 2f(x_2) + 3f(x_3)}{6}$ 。

证明： 由题可知，因为函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，

所以由最值定理可得 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上存在最大值记为 M 以及最小值记为 m ，

又因为 $a \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq b$ ，

所以易得 $m \leq f(x_1) \leq M$, $m \leq f(x_2) \leq M$, $m \leq f(x_3) \leq M$ ，

即 $2m \leq 2f(x_2) \leq 2M$, $3m \leq 3f(x_3) \leq 3M$ ，



则 $6m \leq f(x_1) + 2f(x_2) + 3f(x_3) \leq 6M$,

易得 $m \leq \frac{f(x_1) + 2f(x_2) + 3f(x_3)}{6} \leq M$, 由介值定理可得在闭区间 $[a, b]$ 上

必存在一点 ξ , 使得 $f(\xi) = \frac{f(x_1) + 2f(x_2) + 3f(x_3)}{6}$.



第二章 导数与微分

第一节 导数

本节学习目标

1. 理解导数的定义及几何意义，会根据定义求函数的导数.
2. 理解函数的可导与连续的关系.
3. 熟练掌握基本初等函数的导数公式、导数的四则运算法则、复合函数求导法则、隐函数求导法、对数求导法及参数方程求导法，了解反函数的求导法则.
4. 了解高阶导数的概念，熟练掌握初等函数的一阶和高阶导数的求法.
5. 理解微分的定义、可微与可导的关系，了解微分的四则运算法则及一阶微分形式的不变性；会求函数的微分.

一、导数的概念

1. 函数在一点处的导数定义

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，当自变量 x 在 x_0 处取得增量 Δx (点 $x_0 + \Delta x$ 仍在该邻域内) 时，相应地，因变量取得增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ ；如果当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时， Δy 与 Δx 之比的极限存在，则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导，并称这个极限为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的导数，记为 $f'(x_0)$ ，即

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

也可记作 $y'|_{x=x_0}$ ， $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}$ 或 $\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0}$.

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导有时也说成 $f(x)$ 在点 x_0 具有导数或导数存在.

导数的定义式也可取不同的形式，常见的有

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

和



$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

式中的 h 即自变量的增量 Δx .

例 1. 已知 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} = 1$, 求 $f'(x)$.

$$\begin{aligned} \text{解: 原式} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x) - f(x - \Delta x) + f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} = 2f'(x) = 1, \end{aligned}$$

$$\text{所以 } f'(x) = \frac{1}{2}.$$

例 2. 设 $f(x) = 2x^2$, 试按定义求 $f'(-1)$.

$$\begin{aligned} \text{解: } f'(-1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(-1 + \Delta x) - f(-1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2(-1 + \Delta x)^2 - 2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (-4 + 2\Delta x) = -4. \end{aligned}$$

2. 左导数与右导数

根据函数 $f(x)$ 在点 x_0 处导数 $f'(x_0)$ 的定义, 导数

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

是用极限来描述的, 而极限存在的充分必要条件是左右极限都存在并且相等, 因此

$f'(x_0)$ 存在即 $f(x)$ 在点 x_0 处可导的充要条件是左右极限

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \text{ 及 } \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

都存在且相等, 这两个极限分别称为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左导数和右导数, 记作

$f'_-(x_0)$ 和 $f'_+(x_0)$, 即

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$



$$f'_+(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

因此, 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导的充分必要条件是左导数 $f'_-(x_0)$ 和右导数 $f'_+(x_0)$ 都存在且相等, 即

$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0).$$

例 3. 判断函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ 2x-1, & x > 1 \end{cases}$ 在 $x=1$ 处是否可导.

解: 由题可知, 因为 $f(1)=1$,

当 $x < 1$ 时, $f(x) = x^2$,

$$\begin{aligned} \text{则 } f'_-(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1) = 2, \end{aligned}$$

当 $x > 1$ 时, $f(x) = 2x - 1$,

$$\begin{aligned} \text{则 } f'_+(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x - 1 - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2(x-1)}{x-1} = 2, \text{ 显然 } f'_-(1) = f'_+(1) = 2, \end{aligned}$$

故 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导.

例 4. 判断函数 $y = |x|$ 在 $x=0$ 处是否可导.

解: 由题可知, $y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$, 当 $x=0$ 时, $y=0$,

$x < 0$ 时, $y = -x$,

$$\text{则 } y'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x - 0}{x - 0} = -1,$$

$x > 0$ 时, $y = x$,



$$\text{则 } y'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 0}{x - 0} = 1,$$

显然 $y'_-(0) \neq y'_+(0)$, 故 $y = |x|$ 在 $x = 0$ 处不可导.

注: 和左右极限类似, 左右导数也是判断分段函数在分段点处是否可导的重要方法.

二、导数的几何意义

函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 在几何上表示曲线 $y = f(x)$ 在点 $M(x_0, f(x_0))$ 处的切线的斜率, 即

$$f'(x_0) = \tan \alpha,$$

其中 α 是切线的倾斜角, 如图 2-1.

根据导数的几何意义及直线的点斜式方程, 可得曲线 $y = f(x)$ 在点 $M(x_0, f(x_0))$ 处的切线方程为

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

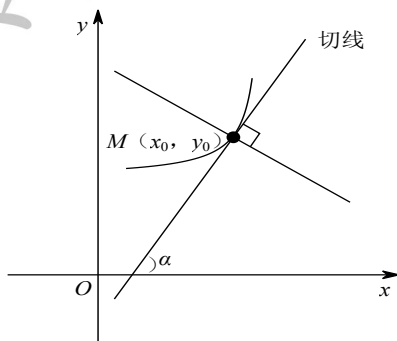


图 2-1

过切点 $M(x_0, f(x_0))$ 且与切线垂直的直线叫做曲线 $y = f(x)$ 在点 M 处的法线. 如果

$f'(x_0) \neq 0$, 法线方程斜率为 $-\frac{1}{f'(x_0)}$, 从而法线方程为

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

例 5. 已知 $y = x^2 + x$, 求 y 在点 $(1, 2)$ 的切线方程和法线方程.

解: 因为点 $(1, 2)$ 满足 $y = x^2 + x$ 方程, 且 $k_{\text{切}} = y'|_{x=1} = (2x+1)|_{x=1} = 3$,

所以切线方程为 $y - 2 = 3(x - 1)$, 即 $y = 3x - 1$;

法线斜率 $k_{\text{法}} = -\frac{1}{k_{\text{切}}} = -\frac{1}{3}$, 所以法线方程为 $y - 2 = -\frac{1}{3}(x - 1)$, 则 $y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$.

例 6. 曲线 $y = \sin x + 2x + 1$, 在点 P 处的切线方程是 $3x - y + 1 = 0$, 则切点 P 的坐标是_____.



解：由题可知，设 P 点坐标为 (x_0, y_0) ，切线斜率 $k_{\text{切}} = -\frac{3}{-1} = 3$ ，

由导数的几何意义可知， $k_{\text{切}} = y'(x_0) = \cos x_0 + 2 = 3$ ，易解得 $x_0 = 2k\pi$ ，

当 $k = 0$ 时，切点为 $(0, 1)$ ，此时切线方程为 $3x - y + 1 = 0$ ；

当 $k \neq 0$ 时，切点为 $(2k\pi, 4k\pi + 1)$ ，不满足切线方程，

综上所述：切点坐标为 $(0, 1)$ 。

例 7. 过点 $(-1, -1)$ 与曲线 $y = e^x + x$ 相切的直线方程。

解：由题可知， $(-1, -1)$ 点不在曲线 $y = e^x + x$ 上，设切点为 $(x_0, e^{x_0} + x_0)$ ，

因为在切点处切线斜率等于在该切点处的导数值，

故切线斜率由两点式可得 $k_{\text{切}} = \frac{e^{x_0} + x_0 - (-1)}{x_0 - (-1)}$ ，

在切点处曲线的导数值为 $y'(x_0) = e^{x_0} + 1$ ，

所以 $\frac{e^{x_0} + x_0 + 1}{x_0 + 1} = e^{x_0} + 1$ ，解得 $x_0 = 0$ ，故切点为 $(0, 1)$ ，

所以切线方程为 $y + 1 = 2(x + 1)$ ，即 $y = 2x + 1$ 。

注：求切线方程的步骤：先判断给的点是否为切点（将点代入曲线方程即可），若满足曲线方程该点为切点，不满足曲线方程则需要令设切点。

三、函数的可导性与连续性的关系

如果函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导，则 $f(x)$ 在点 x_0 处必连续，但反之不一定成立，即函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续，它在该点不一定可导。

例 8. 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处的连续性和可导性。

解：因为 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$ ，

且 $f(0) = 0$ ，故 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = 0$ ，



所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续;

$$\text{又因为 } f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x \sin \frac{1}{x} = 0,$$

$$\text{故左导数存在, 又 } f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \sin \frac{1}{x} = 0,$$

$$\text{所以 } f'_-(0) = f'_+(0) = 0, \text{ 则 } f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \text{ 在 } x=0 \text{ 处可导.}$$

例 9. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ ax + b, & x > 1 \end{cases}$, 求 a, b 为何值时, 使 $f(x)$ 在 $x=1$ 可导.

解: 由题可知, 因为 $f(x)$ 处处可导,

所以 $f'_-(1) = f'_+(1)$, 且在 $x=1$ 处连续,

$$\text{由连续充要条件易知 } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1),$$

$$\text{故 } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax + b) = a + b, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1,$$

易得 $a + b = 1$,

$$\text{又因为 } f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{ax + b - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{ax + 1 - a - 1}{x - 1} = a,$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = 2,$$

所以 $a = 2$, 综上 $a = 2, b = -1$.

四、基本求导法则与导数公式

1. 常数和基本初等函数的求导公式

$$(1) (C)' = 0;$$

$$(2) (x^\mu)' = \mu x^{\mu-1};$$

$$(3) (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$(4) \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2};$$

$$(5) (\sin x)' = \cos x;$$

$$(6) (\cos x)' = -\sin x;$$



$$(7) (\tan x)' = \sec^2 x;$$

$$(8) (\cot x)' = -\csc^2 x;$$

$$(9) (\sec x)' = \sec x \tan x;$$

$$(10) (\csc x)' = -\csc x \cot x;$$

$$(11) (a^x)' = a^x \ln a;$$

$$(12) (e^x)' = e^x;$$

$$(13) (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a};$$

$$(14) (\ln x)' = \frac{1}{x};$$

$$(15) (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(16) (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(17) (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2};$$

$$(18) (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

2. 函数的和、差、积、商的求导法则

设函数 $u = u(x)$, $v = v(x)$ 都可导, 则

$$(1) [u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x);$$

$$(2) [u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x);$$

$$(3) [Cu(x)]' = Cu'(x) \quad (C \text{ 是常数});$$

$$(4) \left[\frac{u(x)}{v(x)} \right]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} \quad (v(x) \neq 0).$$

上式法则 (1)、(2) 可推广到任意有限个可导函数的情形. 例如, 设 $u = u(x)$ 、 $v = v(x)$ 、 $w = w(x)$ 均可导, 则有

$$(u + v - w)' = u' + v' - w',$$

$$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'.$$

例 10. 已知 $y = \tan x$, 求 y' .

$$\begin{aligned} \text{解: } y' &= (\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{(\cos x)^2} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x, \end{aligned}$$



即

$$(\tan x)' = \sec^2 x.$$

例 11. 已知 $y = \csc x$, 求 y' .

$$\begin{aligned}\text{解: } y' &= (\csc x)' = \left(\frac{1}{\sin x} \right)' = \frac{(1)' \sin x - 1 \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x} \\ &= \frac{-\cos x}{\sin^2 x} = -\cot x \csc x,\end{aligned}$$

即

$$(\csc x)' = -\cot x \csc x.$$

例 12. 已知 $y = x^3 + \frac{7}{x^4} - \frac{2}{x} + 12$, 求 y' .

$$\begin{aligned}\text{解: } y &= \left(x^3 + \frac{7}{x^4} - \frac{2}{x} + 12 \right)' \\ &= (x^3)' + \left(\frac{7}{x^4} \right)' - \left(\frac{2}{x} \right)' + (12)' \\ &= 3x^2 + 7 \cdot (x^{-4})' - 2(x^{-1})' \\ &= 3x^2 + 7 \cdot (-4) \cdot x^{-5} - 2 \cdot (-1) \cdot x^{-2} \\ &= 3x^2 - \frac{28}{x^5} + \frac{2}{x^2}.\end{aligned}$$

例 13. 已知 $y = x^2 \cdot \ln x \cdot \cos x$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

$$\begin{aligned}\text{解: } \frac{dy}{dx} &= (x^2 \cdot \ln x \cdot \cos x)' \\ &= (x^2)' \ln x \cdot \cos x + x^2 (\ln x)' \cos x + x^2 \ln x (\cos x)' \\ &= 2x \cdot \ln x \cdot \cos x + x^2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \cos x + x^2 \ln x \cdot (-\sin x) \\ &= 2x \cdot \ln x \cdot \cos x + x \cdot \cos x - x^2 \cdot \ln x \cdot \sin x.\end{aligned}$$



例 14. 已知 $y = \frac{3}{5+x} + \frac{x^2}{5}$, 求 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0}$.

$$\begin{aligned} \text{解: } \frac{dy}{dx} &= \left(\frac{3}{5+x} + \frac{x^2}{5} \right)' \\ &= 3 \left(\frac{1}{5+x} \right)' + \frac{1}{5} \cdot (x^2)' \\ &= \frac{-3}{(5+x)^2} + \frac{2}{5}x \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = -\frac{3}{25}.$$

例 15. 已知 $s = \frac{1+\sin t}{1+\cos t}$, 求 s' .

$$\begin{aligned} \text{解: } s' &= \left(\frac{1+\sin t}{1+\cos t} \right)' \\ &= \frac{(1+\sin t)'(1+\cos t) - (1+\sin t)(1+\cos t)'}{(1+\cos t)^2} \\ &= \frac{\cos t(1+\cos t) - (1+\sin t)(-\sin t)}{(1+\cos t)^2} \\ &= \frac{1+\sin t + \cos t}{(1+\cos t)^2}. \end{aligned}$$

五、反函数的求导法则

如果函数 $x = f(y)$ 在某区间内单调、可导且 $f'(y) \neq 0$, 那么它的反函数 $y = f^{-1}(x)$ 在对应的区间内也可导, 且

$$\left[f^{-1}(x) \right]' = \frac{1}{f'(y)} \text{ 或 } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}.$$

即反函数的导数等于其原函数导数的倒数.



例 16. 求函数 $y = \arcsin x (-1 < x < 1)$ 的导数.

解: 因为 $y = \arcsin x$ 是 $x = \sin y$ 的反函数,

$x = \sin y$ 显然在 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调、可导,

且 $\frac{dx}{dy} = \cos y > 0$, 因此在对应区间 $(-1, 1)$ 内有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\text{即 } (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1).$$

类似地, 可得到 $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1).$

例 17. 已知 $y = x^2 \sin x - 3 \ln x + \frac{\pi}{6}$, 求反函数的导数 $x'(y)$.

解: 因为 $y' = \left(x^2 \sin x - 3 \ln x + \frac{\pi}{6}\right)' = 2x \sin x + x^2 \cos x - \frac{3}{x}$,

$$\text{所以 } x'(y) = \frac{1}{2x \sin x + x^2 \cos x - \frac{3}{x}}.$$

六、复合函数的求导法则

如果 $u = g(x)$ 在点 x 处可导, 而 $y = f(u)$ 在点 $u = g(x)$ 处可导, 则复合函数 $y = f[g(x)]$ 在点 x 处可导, 其导数为

$$\frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot g'(x) \text{ 或 } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

复合函数的求导法则可以推广到多个中间变量的情形. 我们以两个中间变量为例, 设 $y = f(u)$, $u = \varphi(v)$, $v = \psi(x)$, 则



$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx},$$

而 $\frac{du}{dx} = \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$, 故复合函数 $y = f\{\varphi[\psi(x)]\}$ 的导数为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}.$$

当然, 这里要求上式右端出现的导数在相应处都存在.

例 18. 已知 $y = e^{(3x^2+1)}$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

解: 由题可知, $y = e^{(3x^2+1)}$ 可看作由 $y = e^u$, $u = 3x^2 + 1$ 复合而成, 因此

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = e^u \cdot 6x = 6xe^{(3x^2+1)}.$$

例 19. 已知 $y = \sin^2 x$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

解: 由题可知, $y = \sin^2 x$ 可看作由 $y = u^2$, $u = \sin x$ 复合而成, 因此

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 2u \cdot \cos x = 2 \sin x \cos x = \sin 2x.$$

例 20. 已知 $y = \cos \frac{2x}{1+x^2}$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

解: 由题可知, $y = \cos \frac{2x}{1+x^2}$ 可看作由 $y = \cos u$, $u = \frac{2x}{1+x^2}$ 复合而成,

$$\text{因为 } \frac{dy}{du} = -\sin u, \quad \frac{du}{dx} = \frac{2(1+x^2) - 2x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -\sin u \cdot \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{2(x^2-1)}{(1+x^2)^2} \cdot \sin \frac{2x}{1+x^2}. \end{aligned}$$

例 21. 已知 $y = \ln \cos e^x$, 求 y' .

解: 由题可知, $y = \ln \cos e^x$ 可看作由 $y = \ln u$, $u = \cos v$, $v = e^x$ 复合而成,



$$\text{因此 } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = \frac{1}{u} \cdot (-\sin v) \cdot e^x = -\frac{\sin e^x}{\cos e^x} \cdot e^x = -e^x \cdot \tan e^x.$$

从上式例子不难看出, 应用复合函数求导法则时, 首先要分析所给函数可看作由哪些函数复合而成, 或者说, 所给函数能分解成哪些函数的复合. 如果所给函数能分解成比较简单的函数的复合, 而这些简单函数的导数我们已经会求, 那么应用复合函数求导法则就可以求所给函数的导数了.

对复合函数的分解比较熟练后, 往往不必再写出中间变量, 而可以采用下列例题的方式直接计算.

例 22. 已知 $y = \ln \ln \ln x$, 求 y' .

$$\begin{aligned} \text{解: 由题可知, } y' &= (\ln \ln \ln x)' = \frac{1}{\ln \ln x} (\ln \ln x)' \\ &= \frac{1}{\ln \ln x} \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot (\ln x)' = \frac{1}{x \cdot \ln x \cdot \ln \ln x}. \end{aligned}$$

例 23. 已知 $y = \arcsin \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

解: 由题可知,

$$\begin{aligned} y' &= \left(\arcsin \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right)' = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right)^2}} \cdot \left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right)' \\ &= \sqrt{\frac{1+x}{2x}} \cdot \left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right)' = \sqrt{\frac{1+x}{2x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)' \\ &= \sqrt{\frac{1+x}{2x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \cdot \frac{-2}{(1+x)^2} = \frac{-1}{(1+x)\sqrt{2x(1-x)}}. \end{aligned}$$

例 24. 已知 $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

解: 由题可知,



$$\begin{aligned} y' &= \left[\ln(x + \sqrt{1+x^2}) \right]' = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} (x + \sqrt{1+x^2})' \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \left[1 + \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} (1+x^2)' \right] \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}. \end{aligned}$$

例 25. 已知 $y = f(e^x + e^{-x})$ ，且 $f(x)$ 为可导函数，求 $\frac{dy}{dx}$ 。

解：由题可知，因为 $f(x)$ 可导，

$$\text{所以 } y' = f'(e^x + e^{-x}) \cdot (e^x + e^{-x})' = f'(e^x + e^{-x}) \cdot (e^x - e^{-x}).$$

例 26. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 可导，且 $f^2(x) + g^2(x) \neq 0$ ，试求函数

$y = \sqrt{f^2(x) + g^2(x)}$ 的导数。

解：由题可知，因为 $f(x)$ 可导，和 $g(x)$ 可导，且 $f^2(x) + g^2(x) \neq 0$ ，所以

$$\begin{aligned} y' &= \left[\sqrt{f^2(x) + g^2(x)} \right]' = \frac{1}{2\sqrt{f^2(x) + g^2(x)}} \left[f^2(x) + g^2(x) \right]' \\ &= \frac{1}{2\sqrt{f^2(x) + g^2(x)}} [2f(x) \cdot f'(x) + 2g(x) \cdot g'(x)] \\ &= \frac{1}{\sqrt{f^2(x) + g^2(x)}} [f(x) \cdot f'(x) + g(x) \cdot g'(x)]. \end{aligned}$$

从例 25，例 26 不难看出，如果一个函数未给出具体表达式，我们称这类函数为抽象函数，它的求导方法同复合函数求导一致，需找到抽象函数由哪些简单函数复合而成，然后再每一层都求导后求乘积即可。

七、隐函数的求导法则

函数 $y = f(x)$ 表示两个变量 y 与 x 之间的对应关系，这种关系可以用不同的方式



表达.如前面我们遇到的函数 $y = e^x + 1$, $y = \ln x + \sqrt{2+x^2}$ 等.用这种方式表达的函数叫做**显函数**.

但有些函数的表达式却不是这样,如 $2xy + e^x = y^2$, $e^y + 2xy - x = 1$, 此时变量 x , y 的关系隐含在一个形如 $F(x, y) = 0$ 的方程之中,由方程 $F(x, y) = 0$ 确定 x 和 y 的函数关系式.用这种方式表示的函数称为**隐函数**.

显函数求导在前面已经介绍了一些方法,下面重点研究隐函数的求导方法,常见隐函数的求导方法主要有两种:

方法一: 利用复合函数求导法则

将 $F(x, y) = 0$ 中的 y 看作关于 x 的函数 $f(x)$, 方程两边对 x 求导,求导时要把 y 看作中间变量,用复合函数的求导法则,得到一个关于 $\frac{dy}{dx}$ 的式子,解出 $\frac{dy}{dx}$ 即可.

方法二: 公式法

$$\text{隐函数求导公式: } \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

例 27. 分别用上述两种方法求由方程 $e^y + 2xy - x = 1$ 所确定的隐函数的导数.

解: (法一): 等式两端同时对 x 求导得

$$e^y \frac{dy}{dx} + 2y + 2x \frac{dy}{dx} - 1 = 0,$$

整理得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-2y}{e^y + 2x}.$$

(法二): 令 $F(x, y) = e^y + 2xy - x - 1$, 则

$$F'_x(x, y) = 2y - 1, \quad F'_y(x, y) = e^y + 2x$$

即

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} = \frac{1-2y}{e^y + 2x}.$$

注: 从上面例子不难看出,一元隐函数求导时利用公式法更加简便,且不易忽略是否

要乘 $\frac{dy}{dx}$, 为了提高解题正确率,以后求一元隐函数的导数均采用公式法即可.



例 28. 已知 $x^2 + xy + y^2 = 1$, 求 y 在 $(1, -1)$ 处的切线方程.

解: 由题意知, 显然 $(1, -1)$ 在该曲线上, 令 $F(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 1$, 且

$$F'_x(x, y) = 2x + y, \quad F'_y(x, y) = x + 2y,$$

所以

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{2x+y}{x+2y},$$

则 $k_{\text{切}} = y'|_{(1, -1)} = 1$, 故切线方程为 $y+1 = x-1$, 即 $y = x-2$.

八、由参数方程所确定的函数的导数

一般地, 若参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases},$$

确定 y 与 x 间的函数关系, 则称此函数关系所表达的函数为由该参数方程所确定的函数, 其导数为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

上式也可写成

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

例 29. 已知 $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t - \arctan t \end{cases}$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

解: 由题可知, 显然该函数为参数方程, $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}},$

$$\text{易知 } \frac{dy}{dt} = 1 - \frac{1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2},$$



$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{1+t^2} \cdot 2t = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\text{所以 } \frac{dy}{dx} = \frac{t^2}{1+t^2} \cdot \frac{1+t^2}{2t} = \frac{1}{2}t.$$

例 30. 已知 $\begin{cases} x = e^t \sin t \\ y = e^t \cos t \end{cases}$, 求当 $t = \frac{\pi}{3}$ 时 $\frac{dy}{dx}$ 的值.

解: 由题可知, 显然该函数由参数方程所确定, $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$,

$$\text{易知 } \frac{dy}{dt} = e^t \cos t - e^t \sin t, \quad \frac{dx}{dt} = e^t \sin t + e^t \cos t,$$

$$\text{所以 } \frac{dy}{dx} = \frac{e^t \cos t - e^t \sin t}{e^t \sin t + e^t \cos t} = \frac{\cos t - \sin t}{\sin t + \cos t},$$

$$\text{则当 } t = \frac{\pi}{3} \text{ 时, } \left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=\frac{\pi}{3}} = \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \sqrt{3}-2.$$

例 31. 已知 $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos 2t \end{cases}$, 在 $t = \frac{\pi}{4}$ 处的切线方程和法线方程.

解: 由题知, 显然该函数为参数方程所确定, $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$,

$$\text{易知 } \frac{dy}{dt} = -2\sin 2t, \quad \frac{dx}{dt} = \cos t,$$

$$\text{所以 } \frac{dy}{dx} = \frac{-2\sin 2t}{\cos t},$$

$$\text{又当 } t = \frac{\pi}{4} \text{ 时, } x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad y = 0,$$



$$\text{切线斜率为 } k_{\text{切}} = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -2\sqrt{2},$$

所以由点斜式可知切线方程为 $y-0 = -2\sqrt{2}(x-\frac{\sqrt{2}}{2})$, 即 $y = -2\sqrt{2}x + 2$.

$$\text{由切线与法线位置关系可知, } k_{\text{法}} = -\frac{1}{k_{\text{切}}} = \frac{\sqrt{2}}{4},$$

$$\text{所以法线方程为 } y-0 = \frac{\sqrt{2}}{4}(x-\frac{\sqrt{2}}{2}), \text{ 即 } y = \frac{\sqrt{2}}{4}x - \frac{1}{4}.$$

九、取对数求导

在函数 $y = f(x)$ 两端同时取自然对数, 得到一个隐函数, 利用对数性质和隐函数求导法则, 可以通过取对数的方法求复杂幂指函数的导数, 将这类方法称为**取对数求导法**.

通常取对数求导法不仅适用于幂指函数还适用于多因子乘除运算或幂运算较多的函数求导, 在取对数后常应用对数运算法则, 如下:

$$\ln mn = \ln m + \ln n;$$

$$\ln \frac{m}{n} = \ln m - \ln n;$$

$$\ln m^n = n \ln m;$$

$$e^{\ln f(x)} = f(x).$$

例 32. 求 $y = x^{\sin x}$ 的导数.

解: 显然该函数为幂指函数, 等式两端同时取自然对数得 $\ln y = \sin x \ln x$,

$$\text{等式两端同时对 } x \text{ 求导得 } \frac{1}{y} y' = \cos x \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x},$$

$$\text{即 } y' = (\cos x \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}) x^{\sin x}.$$

例 33. 求 $y = \left(\frac{x}{1+x}\right)^x$ 的导数.

解: 显然该函数为幂指函数, 等式两端同时取自然对数得



$$\ln y = x \ln\left(\frac{x}{1+x}\right) = x[\ln x - \ln(1+x)],$$

等式两端同时对 x 求导得

$$\frac{1}{y} y' = \ln x - \ln(1+x) + x\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}\right),$$

$$\text{即 } y' = \left[\ln x - \ln(1+x) + \frac{1}{1+x} \right] \left(\frac{x}{1+x}\right)^x.$$

例 34. 求 $y = \sqrt{x \tan x \sqrt{1-e^x}}$ 的导数.

解: 等式两端同时取自然对数得

$$\ln y = \ln \sqrt{x \tan x \sqrt{1-e^x}} = \frac{1}{2} \left[\ln x + \ln \tan x + \frac{1}{2} \ln(1-e^x) \right],$$

两边同时对 x 求导得

$$\frac{1}{y} y' = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{\tan x} \cdot \sec^2 x + \frac{1}{2(1-e^x)} \cdot (-e^x) \right],$$

$$\text{即 } y' = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{x} + \sec x \csc x - \frac{e^x}{2(1-e^x)} \right] \sqrt{x \tan x \sqrt{1-e^x}}.$$

例 35. 求 $y = \frac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5}$ 的导数.

解: 等式两端同时取自然对数得

$$\ln y = \ln \frac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5} = \frac{1}{2} \ln(x+2) + 4 \ln(3-x) - 5 \ln(x+1),$$

两边同时对 x 求导得

$$\frac{1}{y} y' = \frac{1}{2(x+2)} + \frac{4}{3-x} \cdot (-1) - \frac{5}{x+1},$$

$$\text{即 } y' = \left[\frac{1}{2(x+2)} - \frac{4}{3-x} - \frac{5}{x+1} \right] \frac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5}.$$

注: 从上式几个例子不难看出, 取对数求导法适用幂指函数和多因子乘除法或幂运算



的函数，且取对数后应用对数运算法则化简且一定要化到最简后再求导能简化计算。

十、高阶导数

1. 定义

一般地，函数 $y = f(x)$ 的导数 $y' = f'(x)$ 仍然是 x 的函数。则把 $y' = f'(x)$ 的导数称为 $y = f(x)$ 的二阶导数，记作 y'' 或 $f''(x)$ 或 $\frac{d^2 y}{dx^2}$ 。

即

$$y'' = (y')' \text{ 或 } \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right).$$

相应地，二阶导数的导数，叫做三阶导数，三阶导数的导数叫做四阶导数……；一般地， $(n-1)$ 阶导数的导数叫做 n 阶导数，分别记作

$$y''', y^{(4)}, \dots, y^{(n)}$$

或

$$\frac{d^3 y}{dx^3}, \frac{d^4 y}{dx^4}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}.$$

二阶及二阶以上的导数统称为高阶导数。

例 36. 已知 $y = xe^{x^2}$ ，求 y'' 。

解： $y' = (xe^{x^2})' = e^{x^2} + xe^{x^2} \cdot 2x$ ，

$$\begin{aligned} y'' &= (y')' = (e^{x^2} + 2x^2 e^{x^2})' \\ &= 2xe^{x^2} + 4xe^{x^2} + 2x^2 e^{x^2} \cdot 2x = (6x + 4x^3)e^{x^2}. \end{aligned}$$

例 37. 已知 $y = \frac{e^x}{x}$ ，求 y'' 。

解： $y' = \frac{e^x \cdot x - e^x}{x^2}$ ，

$$y'' = \frac{(e^x \cdot x + e^x - e^x)x^2 - (e^x \cdot x - e^x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{e^x(x^2 - 2x + 2)}{x^3}.$$



例 38. 已知 $y = e^x \cos x$, 求 $y^{(4)}$.

解: $y' = e^x \cos x - e^x \sin x$

$$y'' = e^x \cos x - e^x \sin x - (e^x \sin x + e^x \cos x) = -2e^x \sin x,$$

$$y^{(3)} = -2e^x \sin x - 2e^x \cos x,$$

$$y^{(4)} = -2e^x \sin x - 2e^x \cos x - (2e^x \cos x - 2e^x \sin x) = -4e^x \cos x.$$

例 39. 已知 $f^{(n-2)}(x) = x \ln x$, 求 $f^{(n)}(x)$.

解: 因为 $f^{(n-2)}(x) = x \ln x$,

$$\text{所以 } f^{(n-1)}(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1,$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{x}.$$

十一、函数的微分

1. 函数在某点的微分

设函数 $f(x)$ 在某区间内有定义, x_0 及 $x_0 + \Delta x$ 在区间内, 如果函数值的增量

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

可表示为

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x),$$

其中 A 是与 Δx 无关的常数, 那么称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处是可微的, $A\Delta x$ 叫做函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 相应于自变量增量 Δx 的微分, 记作

$$dy|_{x=x_0} = A\Delta x.$$

通常把自变量 x 的增量 Δx 称为自变量的微分, 记作 dx , 即 $dx = \Delta x$. 所以函数 $y = f(x)$ 的微分可以记为

$$dy = f'(x)dx, \quad dy|_{x=x_0} = f'(x_0)dx.$$

2. 可导与微分的关系

函数 $y = f(x)$ 在点 x 处可微的充分必要条件是 $y = f(x)$ 在点 x 处可导, 即可微



必可导, 可导必可微.

3. 基本初等函数的微分公式

- | | |
|---|---|
| (1) $d(C) = 0dx$; | (2) $d(x^u) = ux^{u-1}dx$; |
| (3) $d(\sin x) = \cos x dx$; | (4) $d(\cos x) = -\sin x dx$; |
| (5) $d(\tan x) = \sec^2 x dx$; | (6) $d(\cot x) = -\csc^2 x dx$; |
| (7) $d(\sec x) = \sec x \tan x dx$; | (8) $d(\csc x) = -\csc x \cot x dx$; |
| (9) $d(a^x) = a^x \ln a dx$; | (10) $d(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a} dx$; |
| (11) $d(e^x) = e^x dx$; | (12) $d(\ln x) = \frac{1}{x} dx$; |
| (13) $d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$; | (14) $d(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$; |
| (15) $d(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2} dx$; | (16) $d(\operatorname{arccot} x) = -\frac{1}{1+x^2} dx$. |

4. 复合函数的微分法则

设 $y = f(u)$ 及 $u = g(x)$ 都可导, 则复合函数 $y = f[g(x)]$ 的微分为

$$dy = y'_x dx = f'(u)g'(x)dx.$$

由于 $g'(x)dx = du$, 所以复合函数 $y = f[g(x)]$ 的微分公式也可写成

$$dy = f'(u)du \text{ 或 } dy = y'_u du.$$

由此可见, 无论 u 是自变量还是中间变量, 微分形式 $dy = f'(u)du$ 保持不变. 这一性质称为微分形式的不变性. 该性质表明, 当变换自变量时, 微分形式 $dy = f'(u)du$ 并不改变.

例 40. 求函数 $y = \frac{x}{\sin x}$ 的微分.

解: $y' = \left(\frac{x}{\sin x}\right)' = \frac{\sin x - x \cos x}{(\sin x)^2},$



所以 $dy = y' dx = \frac{\sin x - x \cos x}{(\sin x)^2} dx$.

例 41. 已知 $y = \sin(2x+5)$, 求 $dy =$ _____.

解: $y' = 2 \cos(2x+5)$

所以 $dy = y' dx = 2 \cos(2x+5) dx$.

例 42. 已知 $y = xe^{2x} + x^2 - 3$, 求 $dy|_{x=1}$.

解: 因为 $y' = e^{2x} + 2xe^{2x} + 2x$, 所以 $y'|_{x=1} = 3e^2 + 2$,

则 $dy|_{x=1} = y'|_{x=1} dx = (3e^2 + 2) dx$.

例 43. 已知 $y = e^{-3x} \cos 2x$, 求 dy .

解: 因为 $dy = y' dx$, $y' = -3e^{-3x} \cos 2x - 2e^{-3x} \sin 2x$,

所以 $dy = -e^{-3x} (3 \cos 2x + 2 \sin 2x) dx$.



第二节 导数的应用

本节学习目标

1. 熟练掌握用洛必达法则求未定式的极限.
2. 理解函数极值的概念、极值存在的必要条件及充分条件.
3. 会求函数的单调区间和极值, 会求函数的最大值与最小值, 会解决一些简单的应用问题, 会证明一些简单的不等式.
4. 了解函数的凹凸性及曲线的拐点的定义, 会求函数的凹凸区间及曲线的拐点.
5. 会求曲线的渐近线, 会描绘一些简单函数的图形.

一、洛必达法则

1. “ $\frac{0}{0}$ ”型未定式极限

若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足下列条件:

- (1) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$;
- (2) 在点 a 的某去心邻域内, $f'(x)$ 与 $g'(x)$ 都存在且 $g'(x) \neq 0$;
- (3) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在 (或为无穷大),

则

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

2. “ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型未定式极限

若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足下列条件:

- (1) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$;
- (2) 在点 a 的某去心邻域内, $f'(x)$ 与 $g'(x)$ 都存在且 $g'(x) \neq 0$;
- (3) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在 (或为无穷大),

则



$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

注：(1) 洛必达法则是求未定式极限的一种有效方法，但是最好能与其他求极限的方法结合使用.例如能化简时尽可能先化简，可以应用等价无穷小替代或重要极限时，应尽可能的应用，这样可以使运算简捷；

(2) 如果 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 也符合洛必达法则条件，可以继续使用洛必达法则.

(3) “ $\frac{0}{0}$ ” 或 “ $\frac{\infty}{\infty}$ ” 或者 “ $\infty - \infty$ ”，“ $0 \cdot \infty$ ”，“ 1^∞ ”，“ 0^0 ”，“ ∞^0 ” 型

未定式，可转化为 “ $\frac{0}{0}$ ” 或 “ $\frac{\infty}{\infty}$ ” 型未定式后应用洛必达法则.

例 1. 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{\tan 2x}$.

$$\begin{aligned} \text{解：原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin x}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

例 2. 计算 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$.

$$\begin{aligned} \text{解：原式} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 3}{3x^2 - 2x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x}{6x - 2} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

例 3. 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\tan x^3}$.

$$\begin{aligned} \text{解：原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} \end{aligned}$$



$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2} = \frac{1}{6}.$$

例 4. 计算 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec x - \tan x)$.

解: 原式 $= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} \right)$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{-\sin x} = 0.$$

例 5. 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$.

解: 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{\frac{1}{2}x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} (e^x + e^{-x})$$

$$= 2.$$

例 6. 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{x^3 e^{2x+1}}$.

解: 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{x^3 e^{2x+1}}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - 1}{3x^2 e}$$



$$= -\frac{1}{3e} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x^2}$$

$$= -\frac{1}{3e}.$$

注：以上第一步中当 $x \rightarrow 0$ 时， $e^{2x+1} \rightarrow e$ ，且 e^{2x+1} 在极限表达式中作为一个因子，因此在计算极限过程中，非零因子可以直接代入。

例 7. 计算 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \tan 7x}{\ln \tan 2x}$.

$$\begin{aligned} \text{解：原式} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\tan 7x} \cdot \sec^2 7x \cdot 7}{\frac{1}{\tan 2x} \cdot \sec^2 2x \cdot 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{7 \tan 2x}{2 \tan 7x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{7 \times 2x}{2 \times 7x} \\ &= 1. \end{aligned}$$

例 8. 计算 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 2025}{-2x^2 - 2025}$.

$$\begin{aligned} \text{解：原式} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x - 2}{-4x} \\ &= -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

3. 其他类型未定式的方法总结

(1) “ $\frac{0}{0}$ ” 型未定式极限

因式分解法

例 9. 计算 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{1 - x^2}$.

$$\text{解：原式} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)(x-1)}{(1+x)(1-x)}$$



$$= -\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{1+x}$$

$$= -\frac{3}{2}.$$

无理根式有理化

例 10. 计算 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1}-2}{x-1}$.

解: 原式 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{3x+1}-2)(\sqrt{3x+1}+2)}{(x-1)(\sqrt{3x+1}+2)}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x-3}{(x-1)(\sqrt{3x+1}+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3}{\sqrt{3x+1}+2}$$

$$= \frac{3}{4}.$$

(2) “ $0 \cdot \infty$ ”型未定式极限

一般“ $0 \cdot \infty$ ”型未定式首先考虑利用化简方法化简, 若化不了简的考虑将其转化为“ $0 \cdot \infty \rightarrow \frac{0}{1} \rightarrow \frac{0}{0}$ ”, 或者“ $0 \cdot \infty \rightarrow \frac{\infty}{1} \rightarrow \frac{\infty}{\infty}$ ”具体转化为哪一类需要看函数表达式哪一个放到分母后求导更简便, 则选择这一个表达式下放至分母.

例 11. 计算 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \ln x$.

解: 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^3}}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{3}{x^4}}$$



$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3}{-3} = 0.$$

例 12. 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}}$.

解: 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x^2}}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{-2}{x^3}}{\frac{-2}{x^3}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x^2}} = \infty.$$

(3) “ 1^∞ , 0^0 , ∞^0 ” 型未定式极限

一般 “ 1^∞ ” 型未定式首选第二重要极限计算, 但有的题目应用第二重要极限较为复杂, 因此对于 “ 1^∞ ” 较为复杂或者是 “ 0^0 , ∞^0 ” 类型的未定式, 对应的极限类型为幂指函数 $y = u(x)^{v(x)}$ 型, 采用的方法往往是幂指函数对数化, 常用公式为 $e^{\ln f(x)} = f(x)$.

例 13. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$.

解: 原式 $= e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x}$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}}$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} -x} = 1.$$

例 14. 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}}$.



解：原式 = $e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln x)}{x}}$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}}$$

$$= 1.$$

(4) “ $\infty - \infty$ ”型未定式极限

这类未定式处理方法往往比较简单，如遇到“ $\infty - \infty$ ”型未定式是分式结构，选择通分；而碰到无理根式结构，则需要有理化即可。

例 15. 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x)$.

解：原式 = $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 3x} - x)(\sqrt{x^2 + 3x} + x)}{(\sqrt{x^2 + 3x} + x)}$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 3x} + x}$$

$$= \frac{3}{2}.$$

例 16. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (\csc x - \frac{1}{x})$.

解：原式 = $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{2x} = 0.$$

二、函数单调区间的判定法

设函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可导。



(1) 如果在 (a, b) 内 $f'(x) > 0$, 则函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调增加.

(2) 如果在 (a, b) 内 $f'(x) < 0$, 则函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调减少.

(3) 如果在 (a, b) 内 $f'(x) = 0$, 则函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是一个常数.

如果把这个判定法中的闭区间换成其他各种区间 (对于无穷区间, 要求在其任一有限的子区间上满足定理的条件), 结论仍然成立.

例 17. 求函数 $y = e^x - x - 1$ 的单调性.

解: 由题可知, 函数定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 且 $y' = e^x - 1$,

当 $y' > 0$ 时, 原函数单调递增, 即单增区间为 $(0, +\infty)$,

当 $y' < 0$ 时, 原函数单调递减, 即单减区间为 $(-\infty, 0]$.

例 18. 求函数 $f(x) = 2x^2 - \ln x$ 的单调性.

解: 由题可知, 函数定义域为 $(0, +\infty)$, 且 $f'(x) = 4x - \frac{1}{x} = \frac{4x^2 - 1}{x}$,

当 $f'(x) > 0$ 时, 原函数单调递增, 即单增区间为 $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$,

当 $f'(x) < 0$ 时, 原函数单调递减, 即单减区间为 $\left(0, \frac{1}{2}\right]$.

三、函数的极值

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有定义, 如果对于去心邻域 $U(x_0)$ 内的任一 x , 有

$$f(x) < f(x_0) \quad (\text{或 } f(x) > f(x_0)),$$

那么就称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个极大值 (或极小值).

函数的极大值和极小值统称为函数的极值, 使函数取得极值的点称为极值点.

注: 极值是一个局部概念, 而不是整体概念. 在一个区间上可有多个极大值和极小值. 同时极大值不一定比极小值大, 存在极大值小于极小值的情形.

(1) 极值点



连续区间单调性的转折点的横坐标（只能出现在区间内部），如果 $y = f(x)$ 的极值点 $x = x_0$ 处可导，则 $f'(x_0) = 0$ 。

(2) 驻点

若 $f'(x_0) = 0$ ，则称 $x = x_0$ 为 $f(x)$ 的驻点。

注：可导函数 $f(x)$ 的极值点必定是它的驻点，但驻点并不一定是极值点。

如 $f(x) = x^3$ 的导数 $f'(x) = 3x^2$ ， $f'(0) = 0$ ，因此 $x = 0$ 是函数的驻点，但 $x = 0$ 却不是函数的极值点。

(3) 可能的极值点：驻点，一阶导数不存在的点。

极值的第一充分条件：

设函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续，且在 x_0 的某去心邻域 $U(x_0)$ 内可导。

① 当 $x < x_0$ 时， $f'(x) > 0$ ；当 $x > x_0$ 时， $f'(x) < 0$ ，则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值；

② 当 $x < x_0$ 时， $f'(x) < 0$ ；当 $x > x_0$ 时， $f'(x) > 0$ ，则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值；

③ 当 $x \in U(x_0, \delta)$ 时， $f'(x)$ 的符号保持不变，则 $f(x)$ 在 x_0 处无极值；

极值的第二充分条件：

设函数 $f(x)$ 在 x_0 处具有二阶导数且 $f'(x_0) = 0$ ， $f''(x_0) \neq 0$ ，则

① 当 $f''(x_0) < 0$ 时，函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值；

② 当 $f''(x_0) > 0$ 时，函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值。

③ 当 $f''(x_0) = 0$ 时，该方法判别失效。

(4) 确定函数 $f(x)$ 的极值点以及单调区间的一般步骤：

① 求出函数的定义域；

② 求出 $f(x)$ 的全部驻点与不可导点；

③ 考察 $f'(x)$ 的符号在每个驻点或不可导点的左、右邻域的情形，以确定该点是否为极值点；如果是极值点，需进一步确定是极大值点还是极小值点。

④ 求出各极值点的函数值，就是函数 $f(x)$ 的全部极值。



注：第二充分条件适用于 $f'(x_0)=0$ 且 $f''(x_0) \neq 0$ 的情形，在 $f'(x_0)$ 不存在 $f''(x_0)=0$ 时需用定义或第一充分条件判定。

例 19. 求函数 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$ 的极值.

解：由题可知，函数定义域为 $(-\infty, +\infty)$ ，

$f'(x)=6x^2-18x+12$ ，令 $f'(x)=0$ ，解得驻点 $x_1=1$ ， $x_2=2$ ，列表如下：

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

综上所述：在 $x=1$ 处取得极大值 $f(1)=2$ ，在 $x=2$ 处取得极小值 $f(2)=1$.

例 20. 求函数 $f(x)=(x-1)x^{\frac{2}{3}}$ 的极值.

解：由题可知，函数定义域为 $(-\infty, +\infty)$ ，

$f'(x)=x^{\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}(x-1)x^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}}(5x-2)$ ，令 $f'(x)=0$ ，解得驻点 $x_1=\frac{2}{5}$ ，

一阶不可导点为 $x_2=0$ ，列表如下：

x	$(-\infty, 0)$	0	$\left(0, \frac{2}{5}\right)$	$\frac{2}{5}$	$\left(\frac{2}{5}, +\infty\right)$
$f'(x)$	+		-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

综上所述：在 $x=0$ 处取得极大值 $f(0)=0$ ，

在 $x=\frac{2}{5}$ 处取得极小值 $f\left(\frac{2}{5}\right)=-\frac{3}{5}\sqrt[3]{\left(\frac{2}{5}\right)^2}$.

例 21. 求函数 $f(x)=\frac{x^3}{(x-1)^2}$ 的极值.



解：由题可知，函数定义域为 $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ ，因为

$$f'(x) = \frac{3x^2(x-1)^2 - 2x^3 \cdot (x-1)}{(x-1)^4} = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}, \text{ 令 } f'(x) = 0, \text{ 解得驻点 } x_1 = 0,$$

$x_2 = 3$ ，一阶不可导点为 $x_3 = 1$ （舍），列表如下：

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	+		-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	无极值	$\nearrow$		$\searrow$	极小值	$\nearrow$

综上所述：在 $x=3$ 处取得极小值 $f(3) = \frac{27}{4}$ 。

例 22. 已知 $x_0 \in (a, b)$ ， $f'(x_0) = 0$ ， $f''(x_0) = -3$ ，则 x_0 一定是 $f(x)$ 的（ ）。

- A. 极小值点 B. 极大值点 C. 最小值点 D. 最大值点

解：由题可知， $f'(x_0) = 0$ ， $f''(x_0) = -3 < 0$ ，由极值的第二充分条件可知，

x_0 一定是 $f(x)$ 的极大值点，故本题答案为 B。

四、函数的最值

若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，则必有最大值与最小值，而最大（小）值点可能会在端点取得，也可能会落入 (a, b) 内部某一点 x_0 ，若落入内部，则最大（小）值点一定是极值点，而极值点一定在区间内部的驻点或导数不存在的点之中，从而可知求闭区间上连续函数的最大值与最小值的方法是：

- (1) 求出 $f(x)$ 在 (a, b) 内的驻点及不可导点；
- (2) 求出 $f(x)$ 在上述驻点、不可导点处的函数值及 $f(a)$ ， $f(b)$ ；
- (3) 比较上述(2)中求出的函数值大小，其中最大的为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值，最小的便是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最小值。

例 23. 求函数 $f(x) = x^3 - 3x^2$ 在区间 $[-1, 4]$ 上的最大值和最小值。

解：由题可知， $f'(x) = 3x^2 - 6x$ ，令 $f'(x) = 0$ ，

解得驻点为 $x_1 = 0$ ， $x_2 = 2$ ，无一阶不可导点，



又因为 $f(-1) = -4$, $f(0) = 0$, $f(2) = -4$, $f(4) = 16$,

显然 $f(-1) = f(2) < f(0) < f(4)$, 所以最大值为 $f(4) = 16$, 最小值为 -4 .

例 24. 已知函数 $f(x) = ax^3 - 6ax^2 + b$ 在区间 $[-1, 2]$ 上的最大值为 3, 最小值为 -29 , 又 $a > 0$, 求 a , b .

解: 由题可知, $f'(x) = 3ax^2 - 12ax$, 令 $f'(x) = 0$,

解得驻点为 $x_1 = 0$, $x_2 = 4$ (舍), 无一阶不可导点,

又因为 $f(-1) = -7a + b$, $f(0) = b$, $f(2) = -16a + b$, 且 $a > 0$,

则易知 $f(0) > f(-1) > f(2)$,

所以最大值为 $f(0) = b = 3$, 最小值为 $f(2) = -16a + b = -29$,

解得 $a = 2$, $b = 3$.

例 25. 某车间靠墙壁要盖一间长方形的小屋, 现有存砖只够砌 20 米长的墙壁, 问应围成怎样的长方形才能使这间小屋的面积最大?

解: 设长方形长为 x , 则宽为 $20 - x$, 长方形面积为 $f(x) = x(20 - x)$,

显然 $x \in (0, +\infty)$, $f'(x) = 20 - x + x(-1) = 20 - 2x$,

令 $f'(x) = 0$, 解得驻点为 $x = 10$, 无一阶不可导点,

故在 $x = 10$ 处取得最大值, $f(10) = 100$, 则长方形小屋面积为 100 平方米.

五、利用单调性证明不等式

例 26. 证明: 当 $x > 1$ 时, $2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}$.

证明: 由题可知, 令 $f(x) = 2\sqrt{x} + \frac{1}{x} - 3$, $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} = \frac{x\sqrt{x} - 1}{x^2}$,

显然当 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$ 恒成立, 即 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

易知 $f(x) > f(1) = 0$, 所以当 $x > 1$ 时, $2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}$ 成立.

例 27. 证明: 当 $a > b > e$ 时, $b^a > a^b$.



证明：由题可知，令 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ，因为 $a > b > e$ ，则 $x \in (e, +\infty)$ ，

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}，显然在 (e, +\infty) 上 f'(x) < 0，$$

所以 $f(x)$ 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减，又 $a > b > e$ ，

$$则 f(b) > f(a)，即 \frac{\ln b}{b} > \frac{\ln a}{a}，$$

综上所述：当 $a > b > e$ 时， $b^a > a^b$ ，得证。

例 28. 证明：当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时， $\tan x > x + \frac{1}{3}x^3$ 。

证明：由题可知，令 $f(x) = \tan x - x - \frac{1}{3}x^3$ ，

$$f'(x) = \sec^2 x - x^2 - 1 = \tan^2 x - x^2 = (\tan x + x)(\tan x - x)，$$

$$令 g(x) = \tan x - x，g'(x) = \sec^2 x - 1 = \tan^2 x，$$

当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时，显然 $g'(x) > 0$ 恒成立，故 $g(x)$ 单调递增，

易得 $g(x) > g(0) = 0$ ，则 $f'(x) > 0$ ，

所以当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时， $f(x)$ 单调递增，故 $f(x) > f(0) = 0$ ，

综上所述，当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时， $\tan x > x + \frac{1}{3}x^3$ 。

例 29. 证明：当 $k < 1$ 时， $e^x - x - k = 0$ 无实根。

证明：由题可知，令 $f(x) = e^x - x - k$ ，

$$f'(x) = e^x - 1，令 f'(x) = 0，得驻点 x = 0，无一阶不可导点，$$

则在 $(-\infty, 0)$ 上 $f'(x) < 0$ ，在 $(0, +\infty)$ 上 $f'(x) > 0$ ，

所以 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处取得极小值，也是最小值即为 $f(0) = 1 - k$ ，

且 $k < 1$ 时， $f(0) > 0$ ，即最小值 $f(0) = 1 - k > 0$ ，



综上所述, 当 $k < 1$ 时, $e^x - x - k = 0$ 无实根.

六、曲线的凹凸区间和拐点

1. 曲线的凹凸性

设 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 如果对 I 上任意两点 x_1, x_2 恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

那么称 $f(x)$ 在 I 上的图形是凹的; 如果恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

那么称 $f(x)$ 在 I 上的图形是凸的.

2. 凹凸性的判定

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内具有一阶和二阶导数, 那么

(1) 若在 (a, b) 内 $f''(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的图形是凹的;

(2) 若在 (a, b) 内 $f''(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的图形是凸的.

3. 拐点

连续曲线 $y = f(x)$ 凹凸区间的分界点称为该曲线的拐点.

注: (1) 拐点和极值点的区别, 极值点是函数 $f(x)$ 取到极值的横坐标 x_0 , 拐点是曲线凹凸区间的分界点, 是一个坐标点 $(x_0, f(x_0))$;

(2) 可疑拐点: 可疑拐点的横坐标包含在二阶导等于零或者二阶导数不存在的点中;

(3) 拐点存在的判定 (充分条件)

设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续, 在 $x = x_0$ 的某去心邻域内二阶可导, 并且在 $x = x_0$ 的左

右邻域 $f''(x)$ 异号, 则点 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

4. 确定函数 $f(x)$ 的拐点以及凹凸区间的步骤

(1) 求出函数的定义域;

(2) 求出 $f''(x) = 0$ 的点及 $f''(x)$ 不存在的点;



(3) 定义域被可疑拐点分成若干区间，列表判定每个区间上 $f''(x)$ 的符号得到凹凸区间及拐点；

(4) 下结论.

例 30. 讨论函数 $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 10$ 的凹凸性，并求其拐点.

解：由题可知，函数定义域为 $(-\infty, +\infty)$ ，

$$f'(x) = 4x^3 - 18x^2 + 24x, \quad f''(x) = 12x^2 - 36x + 24,$$

令 $f''(x) = 0$ ，解得 $x_1 = 1$ ， $x_2 = 2$ ，无二阶不可导点，

列表如下：

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f''(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	∪	拐点	∩	拐点	∪

综上所述：函数的凹区间为 $(-\infty, 1]$ ， $[2, +\infty)$ ，凸区间为 $[1, 2]$ ，拐点为 $(1, -3)$ ， $(2, 6)$.

例 31. 求函数 $f(x) = x^4(12 \ln x - 7)$ 的凹凸区间及拐点.

解：由题可知，函数定义域为 $(0, +\infty)$ ，

$$f'(x) = 4x^3(12 \ln x - 7) + 12x^3, \quad f''(x) = 144x^2 \ln x,$$

令 $f''(x) = 0$ ，解得 $x_1 = 0$ （舍）， $x_2 = 1$ ，无二阶不可导点，

列表如下：

x	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$	∩	拐点	∪

综上所述：函数的凹区间为 $[1, +\infty)$ ，凸区间为 $(0, 1)$ ，拐点为 $(1, -7)$.

例 32. 已知函数 $f(x) = ax^4 + bx^3$ 在 $x = 3$ 处取得极值 -27 ，试求：



(1) 常数 a , b 的值;

(2) 函数 $f(x)$ 的凹凸区间与拐点.

解: (1) 由题可知, $f(x)$ 在 $x=3$ 处取得极值 -27 , 即

$$81a + 27b = -27 \quad ①$$

因为 $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2$, 显然无一阶不可导点, 故 $x=3$ 一定是驻点,

则 $f'(3) = 0$, 即

$$108a + 27b = 0 \quad ②$$

联立①②式可得 $a=1$, $b=-4$.

(2) 由题可知, $f(x)$ 定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 由 (1) 知 $f(x) = x^4 - 4x^3$,

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2, \quad f''(x) = 12x^2 - 24x,$$

令 $f''(x) = 0$, 解得 $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, 无二阶不可导点,

列表如下:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f''(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	∪	拐点	∩	拐点	∪

综上所述: 函数的凹区间为 $(-\infty, 0)$, $(2, +\infty)$; 凸区间为 $[0, 2]$, 拐点为 $(0, 0)$, $(2, -16)$.

七、函数作图

1. 渐近线

当曲线 $y = f(x)$ 上一点 M 沿曲线无限远离原点或无限接近间断点时, 如果点 M 到一条直线的距离无限趋近于零, 那么这条直线称为曲线的渐近线.

根据渐近线的位置, 可分为水平渐近线、垂直 (铅锤) 渐近线、斜渐近线.

(1) 水平渐近线

若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, 则 $y = A$ 是曲线 $y = f(x)$ 的一条水平渐近线;

若 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = B$, 则 $y = B$ 是曲线 $y = f(x)$ 的一条水平渐近线.



注：若 $A=B$ ，只能算做有一条水平渐近线。

(2) 垂直渐近线

若存在 x_0 ，使 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ (或 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$)，则 $x = x_0$ 为曲线 $y = f(x)$ 的一条垂直渐近线。

注：这里的 x_0 一般为 $f(x)$ 的间断点。

(3) 斜渐近线

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为某个无穷区间，若

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = k, \text{ 且 } \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] = b,$$

则称直线 $y = kx + b$ 为曲线 $y = f(x)$ 的斜渐近线。

注：若 $k = 0$ ， $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$ ，则 $y = b$ 为水平渐近线，此时无斜渐近线，意思是说，在同一方向有水平无斜渐近线，有斜渐近线无水平渐近线。

例 33. 求曲线 $y = \frac{x^2}{2x+1}$ 的渐近线。

解：因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2x+1} = \infty$ ，所以该曲线无水平渐近线；

又 $y = \frac{x^2}{2x+1}$ 无定义的点为 $x = -\frac{1}{2}$ ，且 $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{x^2}{2x+1} = \infty$ ，

故 $x = -\frac{1}{2}$ 为曲线的一条垂直渐近线；

设斜渐近线为 $y = kx + b$ ，因为 $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{2x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2x+1} = \frac{1}{2}$ ，

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{2x+1} - \frac{1}{2}x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{2(2x+1)} = -\frac{1}{4},$$

所以斜渐近线为 $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ 。



例 34. 曲线 $y = 1 + \frac{\ln(1+x)}{x}$ 的水平渐近线_____.

解: 因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{\ln(1+x)}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1+x} \right) = 1$,

所以该曲线水平渐近线为 $y = 1$.

例 35. 曲线 $f(x) = \frac{2}{|x-3|}$ ().

A. 有水平渐近线

B. 既有水平渐近线, 又有垂直渐近线

C. 仅有垂直渐近线

D. 既无水平渐近线, 也无垂直渐近线

解: 因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{|x-3|} = 0$, 故水平渐近线为 $y = 0$,

又因为函数无定义的点为 $x = 3$, 且 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{|x-3|} = \infty$,

所以垂直渐近线为 $x = 3$,

且 $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{|x-3|}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x|x-3|} = 0$, 故无斜渐近线,

综上所述, 该曲线有水平渐近线, 也有垂直渐近线, 故本题答案为 B 项.

2. 函数作图的步骤:

- (1) 确定函数的定义域, 奇偶性和周期性;
- (2) 求 $f'(x)$, $f''(x)$, 并求出 $f'(x)$, $f''(x)$ 等于零与导数不存在的点;
- (3) 列表求出单调区间和极值, 凹凸区间和拐点;
- (4) 求渐近线;
- (5) 确定特殊点, 作图.

例 36. 描绘函数 $f(x) = e^{-x^2}$ 的图像.

解: 由题可知, 函数定义域为 $(-\infty, +\infty)$,

且 $f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2}$, 故 $f(x) = f(-x)$, 所以 $f(x)$ 为偶函数,



因为 $f'(x) = -2xe^{-x^2}$ ，令 $f'(x) = 0$ ，得驻点 $x = 0$ ，无一阶不可导点，

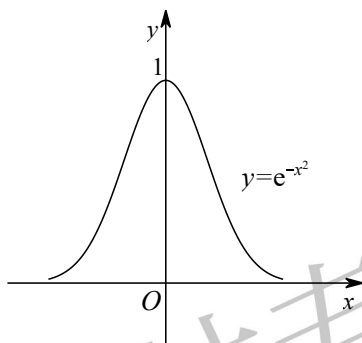
又 $f''(x) = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$ ，令 $f''(x) = 0$ ，得 $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，无二阶不可导点，

列表如下：

x	$(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2})$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$	0	$(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$
$f'(x)$	+	$\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}}$	+	0	-	$-\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}}$	-
$f''(x)$	+	0	-	-2	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow \cup$	拐点	$\nearrow \cap$	极大值	$\searrow \cap$	拐点	$\searrow \cup$

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x^2} = 0$ ，所以曲线水平渐近线为 $y = 0$ ，

特殊点为 $(0, 1)$ ， $(1, e^{-1})$ ，图形如下：



第三节 微分中值定理

本节学习目标

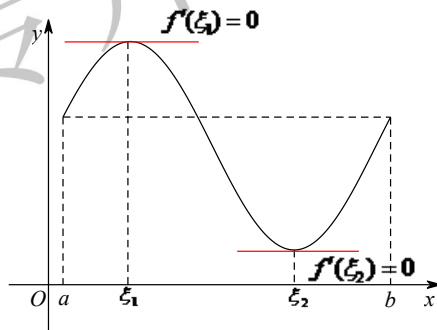
1. 理解罗尔 (Rolle) 定理、拉格朗日中值 (Lagrange) 定理, 了解柯西 (Cauchy) 中值定理和泰勒 (Taylor) 中值定理. 会用罗尔定理证明方程根的存在性, 会用拉格朗日中值定理证明一些简单不等式.

一、罗尔定理

如果函数 $f(x)$ 满足

- (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续;
- (2) 在开区间 (a, b) 内可导;
- (3) 在区间端点处的函数值相等, 即 $f(a) = f(b)$,

那么在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使得 $f'(\xi) = 0$



罗尔定理的几何意义如右图 2-3-1 所示:

图 2-3-1

例 1. 下列函数在给定区间上满足罗尔定理的是 ().

A. $y = \frac{1-x^2}{1+x^2}, x \in [-1, 1]$

B. $y = xe^{-x}, x \in [-1, 1]$

C. $y = \frac{1}{1-x}, x \in [-2, 2]$

D. $y = \begin{cases} x^2, & -1 \leq x \leq 1 \\ x-1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

解: A 项: 因为 $y = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ 在 $[-1, 1]$ 上连续, 在 $(-1, 1)$ 内可导, 且 $y(-1) = y(1) = 0$,

则满足罗尔定理, 故本题答案为 A 项.

B 项: 显然 $y(-1) = -e$, $y(1) = e^{-1}$, 故 $y(-1) \neq y(1)$, 所以不满足罗尔定理, 故排除.

C 项: 显然 $y = \frac{1}{1-x}$ 的间断点为 $x = 1$, 即 $x = 1$ 为不连续点,

所以在 $[-2, 2]$ 上不连续, 故排除.

D 项: 因为 $\lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) = 0$, 显然 $\lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1)$,



则在 $x=1$ 处不连续，故排除。

例 2. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，开区间 $(0, 1)$ 内可导，且 $f(0)=0$ ， $f(1)=3$ ，

证明：在 $(0, 1)$ 内至少存在一点 ξ ，使得 $f'(\xi)=3\xi^2+2$ 。

证明：令 $F(x)=f(x)-x^3-2x$ ，因为 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，开区间 $(0, 1)$ 内可导，

且 $f(0)=0$ ， $f(1)=3$ ，所以 $F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，开区间 $(0, 1)$ 内可导，

因为 $F(0)=0$ ， $F(1)=0$ ，所以 $F(0)=F(1)$ ，

由罗尔定理可得，在 $(0, 1)$ 内至少存在一点 ξ ，使得 $F'(\xi)=0$ ，

即 $f'(\xi)=3\xi^2+2$ 。

例 3. 设 $a_0+\frac{a_1}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n+1}=0$ ，证明：多项式 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ 在 $(0, 1)$

内至少有一个零点。

证明：令 $F(x)=a_0x+\frac{1}{2}a_1x^2+\cdots+\frac{1}{n+1}a_nx^{n+1}$ ，

显然该函数在 $[0, 1]$ 上连续，在 $(0, 1)$ 内可导，

且 $F(0)=0$ ， $F(1)=a_0+\frac{1}{2}a_1+\cdots+\frac{1}{n+1}a_n$ ，

因为 $a_0+\frac{a_1}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n+1}=0$ ，所以 $F(1)=0$ ，故 $F(0)=F(1)$ ，

由罗尔定理可得，至少存在一点 $\xi \in (0, 1)$ ，使得 $F'(\xi)=0$ ，

即 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ 在 $(0, 1)$ 内至少有一个零点。

例 4. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，开区间 $(0, 1)$ 上可导，且 $f(0)=f(1)=0$ ，

$f(\frac{1}{2})=1$ ，证明：在 $(0, 1)$ 内至少存在一点 ξ ，使 $f'(\xi)=1$ 。

证明：令 $F(x)=f(x)-x$ ，

因为 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，开区间 $(0, 1)$ 内可导，



且 $f(0) = f(1) = 0$, $f(\frac{1}{2}) = 1$,

所以 $F(x) = f(x) - x$ 在 $[0, 1]$ 上也连续,

又 $F(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, $F(1) = -1$, 故在 $(\frac{1}{2}, 1)$ 上满足零点定理,

由零点定理结论可得: 至少存在一点 $c \in (\frac{1}{2}, 1)$, 使得 $F(c) = 0$,

且 $F(0) = 0$, 故 $F(0) = F(c)$,

由罗尔定理可得: 至少存在一点 $\xi \in (0, c)$, 使得 $F'(\xi) = 0$, 即 $f'(\xi) - 1 = 0$,

因为 $c \in (\frac{1}{2}, 1)$ 是 $(0, 1)$ 的一个子集, 故在 $(0, 1)$ 内至少存在一点 ξ ,

使 $f'(\xi) = 1$.

二、拉格朗日中值定理

如果函数 $f(x)$ 满足

(1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续;

(2) 在开区间 (a, b) 内可导,

那么在 (a, b) 内至少有一点 ξ , 使等式

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

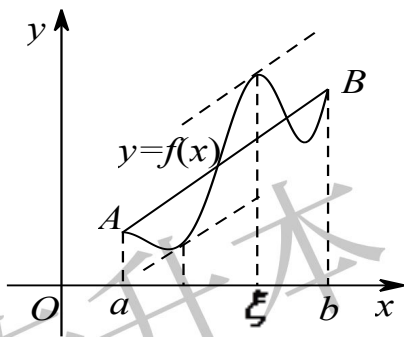


图 2-3-2

拉格朗日中值定理的几何意义如右图 2-3-2 所示:

例 5. 在区间 $[1, e]$ 上满足拉格朗日中值定理的是 ().

A. $\ln(\ln x)$

B. $\ln x$

C. $\frac{1}{\ln x}$

D. $|x - 2|$

解: B 项: 显然 $\ln x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 在 $[1, e]$ 上也连续, 且在 $(1, e)$ 内可导,

故满足拉格朗日中值定理, 本题答案为 B 项.

A 项: 显然 $\ln(\ln x)$ 在区间 $(1, e]$ 上连续, 而在 $x = 1$ 处不连续,

故不满足拉格朗日中值定理.



C 项: 显然 $\frac{1}{\ln x}$ 无定义的点为 $x=1$, 则在 $[1, e]$ 上不连续,

故不满足拉格朗日中值定理.

D 项: $|x-2| = \begin{cases} x-2, & x \geq 2 \\ 2-x, & x < 2 \end{cases}$, 且 $f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2-x-0}{x-2} = -1$,

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2-0}{x-2} = 1,$$

显然 $f'_-(2) \neq f'_+(2)$, 故在 $x=2$ 处不可导.

例 6. 设 $a > b > 0$, 证明: $\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}$.

证明: 令 $f(x) = \ln x$, $x \in [b, a]$,

显然 $f(x)$ 在 $[b, a]$ 上连续, 在 (b, a) 内可导,

由拉格朗日中值定理可得: 至少存在一点 $\xi \in (b, a)$, 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \frac{\ln a - \ln b}{a - b},$$

即

$$\frac{1}{\xi} = \frac{\ln a - \ln b}{a - b},$$

因为 $0 < b < \xi < a$, 所以 $\frac{1}{a} < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{b}$,

所以 $\frac{1}{a} < \frac{\ln a - \ln b}{a - b} < \frac{1}{b}$, 即当 $a > b > 0$, $\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}$ 成立.

例 7. 设 $a > b > 0$, $n > 1$, 证明不等式 $nb^{n-1}(a-b) < a^n - b^n < na^{n-1}(a-b)$.

证明: 令 $f(x) = x^n$, $x \in [b, a]$,

显然 $f(x)$ 在 $[b, a]$ 上连续, 在 (b, a) 内可导,

由拉格朗日中值定理可得: 至少存在一点 $\xi \in (b, a)$, 使得



$$f'(\xi) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \frac{a^n - b^n}{a - b},$$

即

$$n\xi^{n-1} = \frac{a^n - b^n}{a - b},$$

因为 $0 < b < \xi < a$, 且 $n > 1$, 所以 $nb^{n-1} < n\xi^{n-1} < na^{n-1}$,

$$\text{所以 } nb^{n-1} < \frac{a^n - b^n}{a - b} < na^{n-1},$$

即当 $a > b > 0$, $n > 1$, $nb^{n-1}(a - b) < a^n - b^n < na^{n-1}(a - b)$ 成立.

例 3. 证明: 当 $x > 0$ 时, $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$.

证明: 令 $f(t) = \ln(1+t)$, $t \in [0, x]$,

显然 $f(t) = \ln(1+t)$ 在 $[0, x]$ 上连续, 在 $(0, x)$ 内可导,

由拉格朗日中值定理可得, 至少存在一点 $\xi \in [0, x]$,

$$\text{使得 } f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\ln(1+x)}{x}, \text{ 即 } \frac{1}{1+\xi} = \frac{\ln(1+x)}{x},$$

$$\text{因为 } 1 < 1+\xi < 1+x, \text{ 所以 } \frac{1}{1+x} < \frac{1}{1+\xi} < 1, \text{ 即 } \frac{1}{1+x} < \frac{\ln(1+x)}{x} < 1,$$

$$\text{则当 } x > 0 \text{ 时, } \frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

三、柯西中值定理

如果函数 $F(x)$ 及 $G(x)$ 满足:

- (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续;
- (2) 在开区间 (a, b) 内可导;
- (3) 对任一 $x \in (a, b)$, $G(x) \neq 0$,

那么至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使 $\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} = \frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)}$.



四、泰勒中值定理

如果函数 $f(x)$ 在含有 x_0 的某个开区间 (a, b) 内存在直到 $n+1$ 阶导数, 则对任一的 $x \in (a, b)$, 有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x),$$

其中

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

ξ 是 x_0 与 x 之间的一点. $R_n(x)$ 称为拉格朗日余项, 公式称为带有拉格朗日余项的泰勒公式.

拉格朗日余项用 $R_n(x)$ 近似表示 $f(x)$ 时所产生的精确误差. 当对计算的精度要求不高, 不需要余项的精确表达式时, n 阶泰勒公式也可以写成

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o[(x-x_0)^n],$$

其中 $o[(x-x_0)^n]$ 称为佩亚诺 (Peano) 余项, 公式称为带有佩亚诺余项的泰勒公式.

当 $x_0 = 0$ 时, 泰勒公式转化为麦克劳林公式, 即

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x),$$

其中

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

例 9. 求函数 $f(x) = e^x$ 的 n 阶麦克劳林展开式.

解: 因为 $f'(x) = f''(x) = f^{(3)}(x) = \cdots = f^{(n)}(x) = e^x$,



所以 $f'(0) = f''(0) = f^{(3)}(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = 1$,

$$\text{则 } e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

例 10. 求函数 $f(x) = \sin x$ 的 4 阶麦克劳林展开式.

解: 因为 $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = \sin x$,

所以

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = -1, \quad f^{(4)}(0) = 0$$

则 $f(x) = \sin x$ 的 4 阶麦克劳林展开式

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!}.$$



第三章 一元函数积分学

第一节 不定积分

本节学习目标

1. 理解原函数和不定积分的概念及性质.
2. 熟练掌握不定积分的基本公式.
3. 熟练掌握不定积分的换元积分法和分部积分法.

一、原函数与不定积分的概念

1. 原函数的概念

如果在区间 I 上, 可导函数 $F(x)$ 的导函数为 $f(x)$, 即对任一 $x \in I$, 都有

$$F'(x) = f(x) \text{ 或 } dF(x) = f(x)dx,$$

那么函数 $F(x)$ 就称为 $f(x)$ 在区间 I 上的原函数.

例如, 因 $(\sin x)' = \cos x$, 故 $\sin x$ 是 $\cos x$ 的一个原函数.

注: (1) 一个函数的原函数不唯一;

(2) 连续函数一定有原函数;

(3) 任意两个原函数之间相差一个常数 C , 若 $F(x)$ 和 $G(x)$ 均为 $f(x)$ 的一个原函数, 则有

$$F(x) = G(x) + C.$$

2. 不定积分的概念

在区间 I 上, 函数 $f(x)$ 的带有任意常数项的原函数称为 $f(x)$ 在区间 I 上的不定积分, 记作

$$\int f(x)dx.$$

其中记号“ $\int$ ”称为积分号, $f(x)$ 称为被积函数, $f(x)dx$ 称为积分表达式, x 称为积分变量.

如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数, 则有



$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

注：求“ $\int f(x)dx$ ”时，切记要“ $+C$ ”，因为不定积分找的是全体原函数，而不是一个原函数.

例 1. 若 $\int f(x)dx = 4x^3 + C$ ，则 $f(x) = (\quad)$.

A. x^3

B. x^4

C. $8x^2$

D. $12x^2$

解：等式两端同时求导得 $f(x) = 12x^2$ ，故本题答案为 D 项.

例 2. 求 $\int x^3 dx$.

解：因为 $(\frac{1}{4}x^4)' = x^3$ ，所以 $\frac{1}{4}x^4$ 是 x^3 的一个原函数. 因此

$$\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + C.$$

例 3. 求 $\int \cos x dx$.

解：因为 $(\sin x)' = \cos x$ ，所以 $\sin x$ 是 $\cos x$ 的一个原函数. 因此

$$\int \cos x dx = \sin x + C.$$

例 4. 求 $\int a^x dx$.

解：因为 $(\frac{1}{\ln a}a^x)' = a^x$ ，所以 $\frac{1}{\ln a}a^x$ 是 a^x 的一个原函数. 因此

$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C.$$

二、不定积分的性质

性质 1 设函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 的原函数存在，则

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

性质 2 设函数 $f(x)$ 的原函数存在， k 为非零常数，则

$$\int kf(x) dx = k \int f(x) dx.$$



性质 3 $\left[\int f(x) dx \right]' = f(x)$ 或 $d \left[\int f(x) dx \right] = f(x) dx$.

性质 4 $\int F'(x) dx = F(x) + C$ 或 $\int dF(x) = F(x) + C$.

注：两个函数代数和（差）的不定积分等于两个函数的不定积分的代数和（差），无乘积（商）的运算性质。

例 5. 若 $\cos x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int df(x) = (\quad)$.

A. $-\sin x + C$

B. $\sin x + C$

C. $-\cos x + C$

D. $\cos x + C$

解：因为 $\cos x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，

所以 $\int f(x) dx = \cos x + C$, $f(x) = -\sin x$,

则 $\int df(x) = f(x) + C = -\sin x + C$, 故本题答案为 A 项.

例 6. $d \int \arctan^2 x dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

解： $d \int \arctan^2 x dx = \arctan^2 x dx$.

例 7. 求 $\int \sqrt{x}(x^2 - 5) dx$.

解：原式 $= \int (x^{\frac{5}{2}} - 5x^{\frac{1}{2}}) dx = \int x^{\frac{5}{2}} dx - 5 \int x^{\frac{1}{2}} dx$

$= \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} - \frac{10}{3} x^{\frac{3}{2}} + C$.

三、基本积分公式

由于不定积分是求导数（或微分）的逆运算，所以根据导数基本公式就得到相应不定积分的基本公式.

(1) $\int k dx = kx + C$ (k 是常数);

(2) $\int x^\mu dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C$ ($\mu \neq -1$);

(3) $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$;

(4) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$;

(5) $\int e^x dx = e^x + C$;

(6) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$;



$$(7) \int \sin x \, dx = -\cos x + C;$$

$$(8) \int \cos x \, dx = \sin x + C;$$

$$(9) \int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \int \sec^2 x \, dx = \tan x + C;$$

$$(10) \int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = \int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C;$$

$$(11) \int \sec x \tan x \, dx = \sec x + C;$$

$$(12) \int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + C;$$

$$(13) \int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan x + C;$$

$$(14) \int \frac{-1}{1+x^2} \, dx = \operatorname{arccot} x + C;$$

$$(15) \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x + C;$$

$$(16) \int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arccos x + C;$$

补充扩展公式:

$$(17) \int \tan x \, dx = -\ln |\cos x| + C;$$

$$(18) \int \cot x \, dx = \ln |\sin x| + C;$$

$$(19) \int \frac{1}{a^2 + x^2} \, dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C;$$

$$(20) \int \frac{1}{x^2 - a^2} \, dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C;$$

$$(21) \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx = \arcsin \frac{x}{a} + C;$$

$$(22) \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} \, dx = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C;$$

$$(23) \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} \, dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C;$$

$$(26) \int \sec x \, dx = \ln |\sec x + \tan x| + C;$$

$$(27) \int \csc x \, dx = \ln |\csc x - \cot x| + C.$$

四、不定积分的计算方法

(一) 直接积分法

在求不定积分时, 往往对被积函数做适当恒等变形(三角恒等变形、代数运算等)



后，并利用不定积分的性质和基本积分公式来求不定积分的方法。

例 8. 求 $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x}}$.

解：原式 $= \int x^{-\frac{4}{3}} dx$

$$= -3x^{-\frac{1}{3}} + C.$$

例 9. 求 $\int \frac{x^4}{1+x^2} dx$.

解：原式 $= \int \frac{x^4 - 1 + 1}{1+x^2} dx$

$$= \int \frac{(x^2+1)(x^2-1)}{1+x^2} dx + \int \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 - x + \arctan x + C.$$

例 10. 求 $\int \frac{1+x+x^2}{x+x^3} dx$.

解：原式 $= \int \left(\frac{1+x^2}{x+x^3} + \frac{x}{x+x^3} \right) dx$

$$= \int \frac{1+x^2}{x(1+x^2)} dx + \int \frac{x}{x(1+x^2)} dx$$

$$= \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= \ln|x| + \arctan x + C.$$

例 11. 求 $\int \tan^2 x dx$.

解：原式 $= \int (\sec^2 x - 1) dx$

$$= \tan x - x + C.$$

例 12. 求 $\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx$.



$$\begin{aligned}
 \text{解: 原式} &= \int \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\cos x - \sin x} dx \\
 &= \int (\cos x + \sin x) dx \\
 &= \sin x - \cos x + C.
 \end{aligned}$$

例 13. 求 $\int \frac{2 \cdot 3^x - 5 \cdot 2^x}{3^x} dx$.

$$\begin{aligned}
 \text{解: 原式} &= \int 2 dx - 5 \int \left(\frac{2}{3}\right)^x dx \\
 &= 2x - 5 \frac{1}{\ln \frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x + C.
 \end{aligned}$$

例 14. 求 $\int 3^x e^x dx$.

$$\begin{aligned}
 \text{解: 原式} &= \int (3e)^x dx \\
 &= \frac{1}{\ln 3e} (3e)^x + C.
 \end{aligned}$$

(二) 第一类换元法 (凑微分法)

1. 积分形式不变性

若 $\int f(x) dx = F(x) + C$, 则 $\int f(u) du = F(u) + C$, 其中 $u = \varphi(x)$.

2. 凑微分法

设 $f(u)$ 具有原函数 $F(u)$, $u = \varphi(x)$ 可导, 则有换元公式

$$\begin{aligned}
 \int f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx &= \int f[\varphi(x)] d\varphi(x) \stackrel{\text{令 } u=\varphi(x)}{=} \\
 \int f(u) du &= F(u) + C \stackrel{u=\varphi(x)}{=} F[\varphi(x)] + C.
 \end{aligned}$$

注: (1) 公式做了凑微分运算: $\varphi'(x) dx = d\varphi(x)$, 故第一类换元积分法又称凑微分法.

(2) 实质是原积分不易计算, 凑微分得到比较容易计算的积分 $\int f(u) du$.

(3) 换元积分后需回代, 熟练后可省掉换元的步骤.

例 15. 求 $\int 2 \sin 2x dx$.



$$\begin{aligned}\text{解: 原式} &= \int \sin 2x \cdot (2x)' dx \\ &= \int \sin 2x d2x \xrightarrow{\text{令 } u=2x} \int \sin u du \\ &= -\cos u + C \xrightarrow{u=2x} -\cos 2x + C.\end{aligned}$$

例 16. 求 $\int 2xe^{x^2} dx$.

$$\begin{aligned}\text{解: 原式} &= \int e^{x^2} \cdot (x^2)' dx \\ &= \int e^{x^2} dx^2 \xrightarrow{u=x^2} \int e^u du \\ &= e^u + C \xrightarrow{u=x^2} e^{x^2} + C.\end{aligned}$$

注: 不定积分的第一类换元积分法应用熟练后, 可以省略变量代换的过程, 直接凑微分后得到结果即可, 之后的例子不在做变量代换.

例 17. 求 $\int \frac{1}{x(1+2\ln x)} dx$.

$$\begin{aligned}\text{解: 原式} &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+2\ln x} d(1+2\ln x) \\ &= \frac{1}{2} \ln|1+2\ln x| + C.\end{aligned}$$

例 18. 求 $\int \sin^3 x dx$.

$$\begin{aligned}\text{解: 原式} &= \int \sin^2 x \cdot \sin x dx \\ &= \int (1 - \cos^2 x) \cdot \sin x dx \\ &= -\int (1 - \cos^2 x) d\cos x \\ &= -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + C.\end{aligned}$$

例 19. 求 $\int \frac{\arcsin x - x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

$$\text{解: 原式} = \int \left(\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$$



$$\begin{aligned}
 &= \int \arcsin x \, d \arcsin x + \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} d(1-x^2) \\
 &= \frac{1}{2} (\arcsin x)^2 + \sqrt{1-x^2} + C.
 \end{aligned}$$

例 20. 求 $\int \sin^2 x \cos^5 x \, dx$.

$$\begin{aligned}
 \text{解: 原式} &= \int \sin^2 x \cos^4 x \cos x \, dx \\
 &= \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x)^2 d \sin x \\
 &= \int (\sin^2 x - 2 \sin^4 x + \sin^6 x) d \sin x \\
 &= \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{2}{5} \sin^5 x + \frac{1}{7} \sin^7 x + C.
 \end{aligned}$$

例 21. 求 $\int \frac{1}{1+9x^2} \, dx$.

$$\begin{aligned}
 \text{解: 原式} &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{1+(3x)^2} d(3x) \\
 &= \frac{1}{3} \arctan 3x + C.
 \end{aligned}$$

例 22. 求 $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx (a > 0)$.

$$\begin{aligned}
 \text{解: 原式} &= \frac{1}{a} \int \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} dx \\
 &= \int \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} d \frac{x}{a} \\
 &= \arcsin \frac{x}{a} + C.
 \end{aligned}$$

例 23. 求 $\int \frac{1}{x^2 - a^2} \, dx$.



$$\begin{aligned}\text{解: 原式} &= \int \frac{1}{(x+a)(x-a)} dx = \frac{1}{2a} \int \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right) dx \\ &= \frac{1}{2a} \left[\int \frac{1}{x-a} d(x-a) - \int \frac{1}{x+a} d(x+a) \right] \\ &= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.\end{aligned}$$

例 24. 求 $\int \tan^2 x dx$.

$$\begin{aligned}\text{解: 原式} &= \int (\sec^2 x - 1) dx \\ &= \int \sec^2 x dx - \int dx \\ &= \tan x - x + C.\end{aligned}$$

例 25. 若 $\int f(x) dx = F(x) + C$, 则 $\int e^{-x} f(e^{-x}) dx = (\quad)$.

A. $F(e^x) + C$

B. $-F(e^{-x}) + C$

C. $F(e^{-x}) + C$

D. $\frac{F(e^{-x})}{x} + C$

$$\text{解: } \int e^{-x} f(e^{-x}) dx = -\int f(e^{-x}) de^{-x} = -F(e^{-x}) + C,$$

故本题答案为 B 项.

(三) 第二类换元法

第二类换元法强调, 当积分 $\int f(x) dx$ 中不便于计算时, 需要应用整体换元的思想, 一般引入新的积分变量 t , 设 $x = \varphi(t)$ 是单调的可导函数, 并且 $\varphi'(t) \neq 0$, 则将原积分转化为 $\int f[\varphi(t)] d\varphi(t)$, 此过程可表示为

$$\int f(x) dx \xrightarrow[\frac{dx}{dt} = \varphi'(t) dt]{\text{令 } u = \varphi(t)} \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt.$$

这种求不定积分的方法称为第二类换元法, 第二类换元法主要用于求被积函数中含有根号的一类积分, 选择合适的函数 $x = \varphi(t)$ 是去掉根号的主要思路, 积分完毕后要作变量还原. 一般地, 第二类换元积分法常用于被积函数中含有根式的情形, 常用变量代换总结如下:



1. 简单无理根式代换

(1) 被积函数中只含有一个根号 $\sqrt[n]{ax+b}$, 可试用 $t = \sqrt[n]{ax+b}$;

(2) 被积函数中含有两个根号 $\sqrt[n_1]{x}$, $\sqrt[n_2]{x}$, 可试用 $t = \sqrt[n]{x}$, 其中 n 为 n_1, n_2 的最小公倍数.

例 26. 求 $\int \frac{1}{1-\sqrt{1+x}} dx$.

解: 令 $t = \sqrt{1+x}$, 则 $x = t^2 - 1, dx = 2t dt$,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \frac{1}{1-t} 2t dt = -2 \int \frac{1-t-1}{1-t} dt = -2 \int \left(1 - \frac{1}{1-t} \right) dt \\ &= -2t + 2 \int \frac{1}{1-t} dt = -2t - 2 \int \frac{1}{1-t} d(1-t) \\ &= -2t - 2 \ln|1-t| + C \\ &= -2\sqrt{1+x} - 2 \ln|1-\sqrt{1+x}| + C. \end{aligned}$$

例 27. 求 $\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}} dx$.

解: 令 $t = \sqrt{1+e^x}$, 则 $x = \ln(t^2 - 1), dx = \frac{2t}{t^2 - 1} dt$,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \frac{1}{t} \cdot \frac{2t}{t^2 - 1} dt = \int \frac{2}{t^2 - 1} dt \\ &= \int \frac{2}{(t+1)(t-1)} dt \\ &= \int \frac{1}{t-1} d(t-1) - \int \frac{1}{t+1} d(t+1) \\ &= \ln|t-1| - \ln|t+1| + C \\ &= 2 \ln(\sqrt{1+e^x} - 1) - x + C. \end{aligned}$$

例 28. 求 $\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} dx$.



解：令 $t = \sqrt[4]{x}$ ，则 $x = t^4$ ， $dx = 4t^3 dt$ ，则

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \frac{1}{t^2 + t} 4t^3 dt = \int \frac{4t^2}{t+1} dt \\ &= 4 \int \frac{t^2 - 1 + 1}{t+1} dt \\ &= 4 \int \frac{(t+1)(t-1)}{t+1} dt + 4 \int \frac{1}{t+1} dt \\ &= 4 \int (t-1) dt + 4 \int \frac{1}{t+1} d(t+1) \\ &= 2t^2 - 4t + 4 \ln|1+t| + C \\ &= 2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 4 \ln|1 + \sqrt[4]{x}| + C. \end{aligned}$$

2. 三角代换

(1) 被积函数中含有 $\sqrt{a^2 - x^2}$ ，可试用 $x = a \sin t$ ， $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ，

(利用 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$) .

(2) 被积函数中含有 $\sqrt{x^2 - a^2}$ ，可试用 $x = a \sec t$ ， $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ，

(利用 $\sec^2 x - 1 = \tan^2 x$) .

(3) 被积函数中含有 $\sqrt{x^2 + a^2}$ ，可试用 $x = a \tan t$ ， $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ，

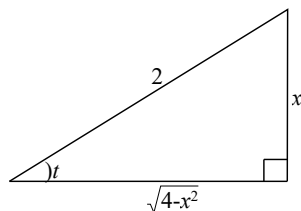
(利用 $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$) .

注：回代时需构造辅助三角形

例 29. 求 $\int \sqrt{4-x^2} dx$.

解：令 $x = 2 \sin t$ ， $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ，则 $dx = 2 \cos t dt$ ，即

$$\text{原式} = \int \sqrt{4 - 4 \sin^2 t} \cdot 2 \cos t dt$$



公益伴学老师 (入营免费领配套网课
在线答疑、智能刷题小程序等权益)



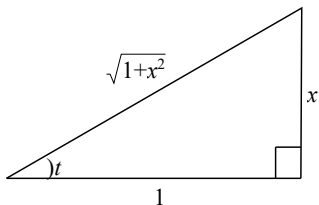
升本公众号

$$\begin{aligned}
 &= \int 2 \cos t \cdot 2 \cos t dt = 2 \int (1 + \cos 2t) dt \\
 &= 2t + \int \cos 2t d2t = 2t + \sin 2t + C \\
 &= 2 \arcsin \frac{x}{2} + \frac{1}{2} x \sqrt{4 - x^2} + C.
 \end{aligned}$$

例 30. 求 $\int x \sqrt{1+x^2} dx$.

解: 令 $x = \tan t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, 则 $dx = \sec^2 t dt$,

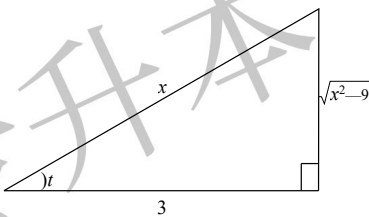
$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \int \tan t \sqrt{1 + \tan^2 t} \cdot \sec^2 t dt \\
 &= \int \tan t \sec t \cdot \sec^2 t dt = \int \sec^2 t d \sec t \\
 &= \frac{1}{3} \sec^3 t + C = \frac{1}{3} (1 + x^2)^{\frac{3}{2}} + C.
 \end{aligned}$$



例 31. 求 $\int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 - 9}} dx$.

解: 令 $x = 3 \sec t, t \in (0, \frac{\pi}{2})$, 则 $dx = 3 \sec t \tan t dt$,

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \int \frac{1}{9 \sec^2 t \sqrt{9 \sec^2 t - 9}} 3 \sec t \tan t dt \\
 &= \int \frac{1}{3 \sec t \cdot 3 \tan t} \tan t dt = \frac{1}{9} \int \frac{1}{\sec t} dt \\
 &= \frac{1}{9} \int \cos t dt = \frac{1}{9} \sin t + C = \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{9x} + C.
 \end{aligned}$$



(四) 分部积分法

设函数 $u = u(x)$ 及 $v = v(x)$ 具有连续导数, 那么两个函数乘积的导数公式为

$$(uv)' = u'v + uv',$$

移项得

$$uv' = (uv)' - u'v,$$



对这个不等式两边同时求不定积分，得

$$\int uv' dx = uv - \int vu' dx.$$

或

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

注：（1）分部积分后， $\int u'v dx$ 要比 $\int uv' dx$ 容易计算；

（2）解决问题时，一般先将 $\int uv' dx$ 凑微分为 $\int u dv$ ，再使用分部积分。

分部积分口诀：反对幂三指，谁在后谁为 v' 。

其中反代表反三角函数；对代表对数函数；幂代表幂函数；指代表数函数；三代表三角函数（正余弦）。

例 32. 求 $\int x \cos x dx$ 。

$$\begin{aligned} \text{解：原式} &= \int x d\sin x \\ &= x \sin x - \int \sin x dx \\ &= x \sin x + \cos x + C. \end{aligned}$$

例 33. 求 $\int x e^{-x} dx$ 。

$$\begin{aligned} \text{解：原式} &= -\int x de^{-x} \\ &= -xe^{-x} + \int e^{-x} dx \\ &= -xe^{-x} - e^{-x} + C. \end{aligned}$$

例 34. 求 $\int x \arctan x dx$ 。

$$\begin{aligned} \text{解：原式} &= \frac{1}{2} \int \arctan x dx^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(x^2 \arctan x - \int x^2 \cdot \frac{1}{1+x^2} dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(x^2 \arctan x - \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2} dx \right) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \left(x^2 \arctan x - \int dx + \int \frac{1}{1+x^2} dx \right) \\
 &= \frac{1}{2} (x^2 \arctan x - x + \arctan x) + C.
 \end{aligned}$$

例 35. 求 $\int x \sin x \cos x dx$.

解: 原式 $= \frac{1}{2} \int x \sin 2x dx$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{4} \int x d \cos 2x \\
 &= -\frac{1}{4} x \cos 2x + \frac{1}{4} \int \cos 2x dx \\
 &= -\frac{1}{4} x \cos 2x + \frac{1}{8} \sin 2x + C.
 \end{aligned}$$

例 36. 求 $\int \ln^2 x dx$.

解: 原式 $= \int \ln^2 x dx$

$$\begin{aligned}
 &= x \ln^2 x - \int x d \ln^2 x \\
 &= x \ln^2 x - \int 2x \ln x \cdot \frac{1}{x} dx \\
 &= x \ln^2 x - 2 \int \ln x dx \\
 &= x \ln^2 x - 2x \ln x + 2 \int x \cdot \frac{1}{x} dx \\
 &= x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + C.
 \end{aligned}$$

例 37. 求 $\int [e^{2x} + \ln(1+x)] dx$.

解: 原式 $= \int e^{2x} dx + \int \ln(1+x) dx$

$$= \frac{1}{2} \int e^{2x} d2x + x \ln(1+x) - \int x d \ln(1+x)$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} e^{2x} + x \ln(1+x) - \int x \cdot \frac{1}{1+x} dx \\
 &= \frac{1}{2} e^{2x} + x \ln(1+x) - \int \frac{1+x-1}{1+x} dx \\
 &= \frac{1}{2} e^{2x} + x \ln(1+x) - \int dx + \int \frac{1}{1+x} d(1+x) \\
 &= \frac{1}{2} e^{2x} + x \ln(1+x) - x + \ln|1+x| + C.
 \end{aligned}$$

例 38. 求 $\int e^{\sqrt{x}} dx$.

解: 令 $\sqrt{x} = t$, 则 $x = t^2$, $dx = 2t dt$,

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= 2 \int e^t \cdot t dt \\
 &= 2 \int t de^t \\
 &= 2te^t - 2 \int e^t dt \\
 &= 2te^t - 2e^t + C \\
 &= 2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + C.
 \end{aligned}$$

例 39. 求 $\int e^x \sin x dx$.

$$\begin{aligned}
 \text{解: 原式} &= \int \sin x de^x \\
 &= e^x \sin x - \int e^x d \sin x \\
 &= e^x \sin x - \int e^x \cos x dx \\
 &= e^x \sin x - \int \cos x de^x \\
 &= e^x \sin x - e^x \cos x + \int e^x d \cos x \\
 &= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx
 \end{aligned}$$

综上可得 $\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx$,

$$\text{故 } 2 \int e^x \sin x dx = e^x \sin x - e^x \cos x + C_1,$$



即 $\int e^x \sin x \, dx = \frac{1}{2}(e^x \sin x - e^x \cos x) + C$ (其中 $C = \frac{1}{2}C_1$).

例 40. 求 $\int \sec^3 x \, dx$.

解: 原式 $= \int \sec x \, d \tan x$

$$= \sec x \tan x - \int \sec x \cdot \tan^2 x \, dx$$

$$= \sec x \tan x - \int \sec x \cdot (\sec^2 x - 1) \, dx$$

$$= \sec x \tan x - \int \sec^3 x \, dx + \int \sec x \, dx$$

$$= \sec x \tan x + \ln |\sec x + \tan x| - \int \sec^3 x \, dx,$$

综上, $\int \sec^3 x \, dx = \sec x \tan x + \ln |\sec x + \tan x| - \int \sec^3 x \, dx,$

即 $2 \int \sec^3 x \, dx = \sec x \tan x + \ln |\sec x + \tan x| + C_1,$

得 $\int \sec^3 x \, dx = \frac{1}{2}(\sec x \tan x + \ln |\sec x + \tan x|) + C$ (其中 $C = \frac{1}{2}C_1$).

例 41. 设 $f(x)$ 的一个原函数为 e^{-x^2} , 求 $\int x f'(x) \, dx$.

解: 因为 $f(x)$ 的一个原函数为 e^{-x^2} ,

所以易得 $f(x) = (e^{-x^2})' = -2xe^{-x^2}$, $\int f(x) \, dx = e^{-x^2} + C$,

$$\int x f'(x) \, dx = \int x \, df(x) = x f(x) - \int f(x) \, dx.$$

$$= -2x^2 e^{-x^2} - e^{-x^2} + C.$$



第二节 定积分

本节学习目标

1. 理解定积分的概念和几何意义，掌握定积分的基本性质.
2. 理解变限积分函数的定义，掌握求变限积分函数导数的方法.
3. 熟练掌握牛顿-莱布尼兹（Newton-Leibniz）公式，掌握定积分的换元法和分部积分法.
4. 了解无穷区间上有界函数的广义积分与有限区间上无界函数的瑕积分的概念，掌握其计算方法.

一、定积分的概念

1. 定积分的定义

问题引入：曲边梯形的面积计算

曲边梯形是由连续曲线 $y = f(x)$ ，（ $f(x) > 0$ ）以及 $x = a$ ， $x = b$ 及 x 轴围成的图形. 如下图 3-2-1:

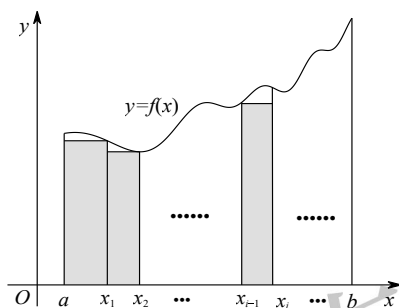


图 3-2-1

在已有的知识基础上，并未接触过曲边梯形面积的计算方法，下面着重讨论曲边梯形面积计算的方法：

(1) 分割

取 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ ，则

$$[a, b] = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \cdots \cup [x_{n-1}, x_n],$$

其中

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} (1 \leq i \leq n);$$

(2) 近似替代（以直代曲）



$$\Delta S_i \approx f(\xi_i) \Delta x_i, \quad x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i, \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1};$$

(3) 近似求和

$$S_n = \sum_{i=1}^n \Delta S_i = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i;$$

(4) 取极限

$$S = \lim_{\lambda \rightarrow 0} S_n = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i, \quad (\text{其中 } \lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\}).$$

如果上述极限存在(与分法无关,与 ξ_i 的取法无关),则称 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积,并称上述极限为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的定积分,记为

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

其中 $f(x)$ 叫做被积函数, $f(x)dx$ 叫做被积表达式, x 叫做积分变量, a 叫做积分下限, b 叫做积分上限, $[a, b]$ 叫做积分区间.

注:定积分的值只与被积函数及积分区间有关,而与积分变量的记法无关,也就是说

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du.$$

2. 定积分存在的充分条件(可积的条件)

- (1) 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续,则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积;
- (2) 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调有界,则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积;
- (3) 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 有有限个间断点,且有界,则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积.

3. 定积分的几何意义

(1) 在区间 $[a, b]$ 上函数 $f(x) \geq 0$ 时,定积分 $\int_a^b f(x) dx$ 在几何上表示由曲线 $y = f(x)$,两条直线 $x = a$, $x = b$ 与 x 轴所围成的曲边梯形的面积,如右图 3-2-2.

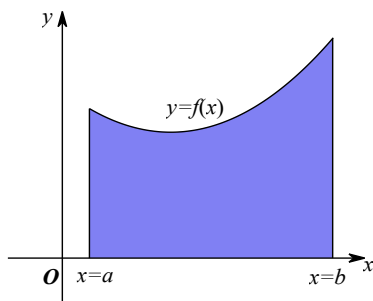


图 3-2-2



(2) 在区间 $[a, b]$ 上函数 $f(x) \leq 0$ 时, 定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 在几何上表示由曲线 $y = f(x)$, 两条直线 $x = a, x = b$ 与 x 轴所围成的曲边梯形位于 x 轴的下方, 定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 在几何上表示上述曲边梯形面积的负值, 如右图 3-2-3.

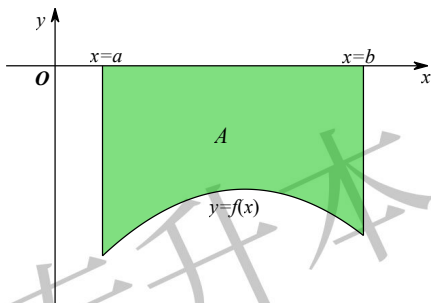


图 3-2-3

(3) 在区间 $[a, b]$ 上 $f(x)$ 既取得正值又取得负值时, 函数 $f(x)$ 的图形某些部分在 x 轴的上方, 而其他部分在 x 轴的下方, 此时定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 表示 x 轴上方图形的面积减去 x 轴下方面积所得之差 (代数和), 即

$\int_a^b f(x)dx = A_1 - A_2 + A_3$, 如右图 3-2-4.

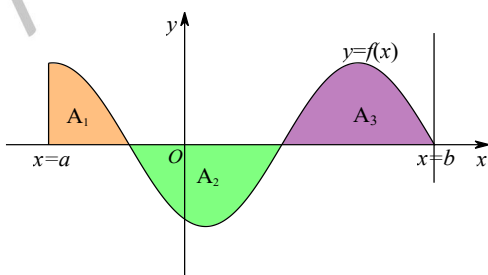


图 3-2-4

二、定积分的性质

性质 1 若 $a = b$ 时, $\int_a^a f(x)dx = 0$;

性质 2 若 $a > b$ 时, $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$;

性质 3 设 α 与 β 均为常数, 则

$$\int_a^b [\alpha f(x) \pm \beta g(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x)dx \pm \beta \int_a^b g(x)dx;$$

性质 4 区间可加性 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, (c \in R)$;

性质 5 如果在区间 $[a, b]$ 上 $f(x) \equiv 1$, 那么

$$\int_a^b dx = b - a;$$

性质 6 设函数 $f(x)$ 在区间 $[-a, a]$ 上连续.



(1) 若 $f(x)$ 在区间 $[-a, a]$ 上为偶函数, 则 $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx = 2\int_{-a}^0 f(x)dx$;

(2) 若 $f(x)$ 在区间 $[-a, a]$ 上为奇函数, 则 $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$.

例 1. 计算 $\int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2} dx =$ _____.

解: 因为 $\sqrt{9-x^2}$ 为偶函数, 所以根据性质及几何意义知,

$$\begin{aligned}\text{原式} &= 2\int_0^3 \sqrt{3^2-x^2} dx \\ &= 2 \times \frac{1}{4} \pi \times 3^2 = \frac{9}{2} \pi.\end{aligned}$$

例 2. 下列定积分结果为 0 的是 ().

A. $\int_{-1}^1 x \cos x dx$

B. $\int_{-1}^1 x \sin x dx$

C. $\int_{-1}^1 (x^2 + \sin x) dx$

D. $\int_{-1}^1 (x^2 + \cos x) dx$

解: A 项: $f(x) = x \cos x$ 显然为奇函数, 根据“偶倍奇零”性质得

$$\int_{-1}^1 x \cos x dx = 0, \text{ 故本题答案为 A 项;}$$

B 项: $f(x) = x \sin x$ 显然为偶函数, 根据“偶倍奇零”性质得

$$\int_{-1}^1 x \sin x dx = 2\int_0^1 x \sin x dx \neq 0, \text{ 故排除;}$$

C 项: $f(x) = x^2 + \sin x$ 显然为非奇非偶函数, 根据“偶倍奇零”性质得

$$\int_{-1}^1 (x^2 + \sin x) dx \neq 0, \text{ 故排除;}$$

D 项: $f(x) = x^2 + \cos x$ 显然为偶函数, 根据“偶倍奇零”性质得

$$\int_{-1}^1 (x^2 + \cos x) dx \neq 0, \text{ 故排除.}$$

例 3. 定积分 $\frac{d}{dx} \int_0^1 \arcsin x dx =$ ().

A. 0

B. $\arcsin x$



C. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

D. $\frac{\pi}{2}$

解：由定积分的几何意义可知，定积分代表曲边梯形的面积，是一个数值，

故 $\frac{d}{dx} \int_0^1 \arcsin x dx$ 表示对 $\int_0^1 \arcsin x dx$ 求导，

所以 $\frac{d}{dx} \int_0^1 \arcsin x dx = 0$ ，故本题答案为 A 项。

三、牛顿—莱布尼茨公式

如果函数 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的一个原函数，那么

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

上式叫做牛顿(Newton)—莱布尼茨(Leibniz)公式.这个定理表明，一个连续函数在区间 $[a, b]$ 上的定积分等于它的任一个原函数在区间 $[a, b]$ 上的增量，这就给定积分提供了一个有效而简便的计算方法，通常把上述公式称为微积分基本公式.

例 4. 计算 $\int_0^1 x^3 dx$.

解：原式 $= \frac{1}{4} x^4 \Big|_0^1 = \frac{1}{4}$.

例 5. 计算 $\int_{-1}^0 \frac{3x^4 + 3x^2 + 1}{1+x^2} dx$.

解：原式 $= \int_{-1}^0 \frac{3x^2(x^2+1)+1}{1+x^2} dx$
 $= \int_{-1}^0 3x^2 dx + \int_{-1}^0 \frac{1}{1+x^2} dx$
 $= x^3 \Big|_{-1}^0 + \arctan x \Big|_{-1}^0$
 $= 1 + (0 + \frac{\pi}{4})$
 $= 1 + \frac{\pi}{4}$.



例 6. 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x dx$.

解: 原式 $= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x d \cos x$

$$= -\frac{1}{3} \cos^3 x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{3}.$$

例 7. 计算 $\int_{-1}^4 \frac{x^3}{1+x^2} dx$.

解: 原式 $= \frac{1}{2} \int_{-1}^4 \frac{x^2}{1+x^2} d(1+x^2)$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^4 \frac{x^2 + 1 - 1}{1+x^2} d(1+x^2)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^4 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) d(1+x^2)$$

$$= \frac{1}{2} (1+x^2) \Big|_{-1}^4 - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \Big|_{-1}^4$$

$$= \frac{1}{2} \left(15 - \ln \frac{17}{2}\right).$$

例 8. 计算 $\int_0^{\ln 2} e^x (e^x + 1) dx$.

解: 原式 $= \int_0^{\ln 2} (e^x + 1) d(e^x + 1)$

$$= \frac{1}{2} (e^x + 1)^2 \Big|_0^{\ln 2} = \frac{5}{2}.$$

例 9. 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx$.

解: (法一) 原式 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx$



$$= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 2x + 2 \cos 2x + 1) dx$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 + \cos 4x}{2} \right) dx + \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \cos 2x + 1) dx$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{4} \sin 4x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4} \times \left(2 \times \frac{1}{2} \sin 2x + x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{3\pi}{16}.$$

(法二) 原式 = $\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{16}.$

注：华里士公式（点火公式）： $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx,$

$$I = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \times \frac{n-3}{n-2} \times \cdots \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} & (n \text{ 为正偶数}) \\ \frac{n-1}{n} \times \frac{n-3}{n-2} \times \cdots \times \frac{6}{7} \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} & (n \text{ 为正奇数}) \end{cases}$$

例 10. 计算 $\int_0^{2\pi} |\cos x| dx.$

解：由题意可知，在 $[0, 2\pi]$ 上， $|\cos x| = \begin{cases} \cos x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ 或 } \frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi \\ -\cos x, & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases},$

$$\text{故 } \int_0^{2\pi} |\cos x| dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (-\cos x) dx + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos x dx$$

$$= \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \sin x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} + \sin x \Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}$$

$$= 1 - (-1 - 1) + (0 + 1)$$

$$= 4.$$



例 11. 设 $f(x) = \begin{cases} 1+x^2, & x \leq 0 \\ e^{-x}, & x > 0 \end{cases}$, 求定积分 $\int_{-1}^2 f(x) dx$.

解: 原式 $= \int_{-1}^0 (1+x^2) dx + \int_0^2 e^{-x} dx$

$$\begin{aligned} &= \left(x + \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_{-1}^0 - e^{-x} \Big|_0^2 \\ &= 0 - \left(-1 - \frac{1}{3} \right) - (e^{-2} - 1) \\ &= \frac{7}{3} - e^{-2}. \end{aligned}$$

例 12. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 且满足 $f(x) = e^x + 2 \int_0^1 f(t) dt$, 求 $f(x)$.

解: 设 $\int_0^1 f(t) dt = A$ (常数), 则 $f(x) = e^x + 2A$,

$$\begin{aligned} \text{所以 } \int_0^1 f(t) dt &= \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (e^x + 2A) dx \\ &= (e^x + 2Ax) \Big|_0^1 \\ &= e + 2A - 1. \end{aligned}$$

综上 $A = e + 2A - 1$, 解得 $\int_0^1 f(t) dt = A = 1 - e$,

所以 $f(x) = e^x + 2(1 - e)$.

四、定积分的换元法和分部积分法

1. 定积分的换元法

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 函数 $x = \varphi(t)$ 满足条件:

- (1) $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$;
- (2) $\varphi(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ (或 $[\beta, \alpha]$) 上具有连续导数, 且其值域 $R_\varphi = [a, b]$, 则有

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt.$$

注: 应用换元公式时有两点值得注意:

- (1) 换元必换限, 但换元积分后不必像计算不定积分那样进行回代, 只需利用牛顿-



莱布尼茨公式将新的上下限代入原函数计算增量即可；

(2) 换元后积分上限可以小于下限；

(3) 用凑微分法确定原函数时，不用换限，即 $\int_a^b g[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int_a^b g[\varphi(x)]d\varphi(x)$.

例 13. 计算 $\int_0^7 \frac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}} dx$.

解：令 $t = \sqrt[3]{x+1}$ ，则 $x = t^3 - 1$ ， $dx = 3t^2 dt$ ，

当 $x = 0$ 时， $t = 1$ ；当 $x = 7$ 时， $t = 2$ ，

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_1^2 \frac{1}{1+t} 3t^2 dt \\ &= 3 \int_1^2 \frac{t^2 - 1 + 1}{1+t} dt \\ &= 3 \int_1^2 \frac{(t-1)(t+1)}{1+t} dt + 3 \int_1^2 \frac{1}{1+t} d(t+1) \\ &= 3 \left(\frac{1}{2} t^2 - t \right) \Big|_1^2 + 3 \ln |1+t| \Big|_1^2 \\ &= 3 \left(\frac{1}{2} + \ln \frac{3}{2} \right). \end{aligned}$$

例 14. 计算 $\int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}} dx$.

解：令 $t = \sqrt{1+e^x}$ ，则 $x = \ln(t^2 - 1)$ ， $dx = \frac{2t}{t^2 - 1} dt$ ，

当 $x = \ln 3$ 时， $t = 2$ ；当 $x = \ln 8$ 时， $t = 3$ ，

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_2^3 \frac{t^2 - 1}{t} \cdot \frac{2t}{t^2 - 1} dt \\ &= 2 \int_2^3 dt \\ &= 2t \Big|_2^3 = 2. \end{aligned}$$

例 15. 计算 $\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx$.



解: 令 $x = 2 \sin t$, 则 $dx = 2 \cos t dt$,

当 $x = 0$ 时, $t = 0$; 当 $x = 2$ 时, $t = \frac{\pi}{2}$,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 \cos^2 t dt \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt \\ &= 2 \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \pi. \end{aligned}$$

例 16. 计算 $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2 \sqrt{1+x^2}} dx$.

解: 令 $x = \tan t$, 则 $dx = \sec^2 t dt$,

当 $x = 1$ 时, $t = \frac{\pi}{4}$; 当 $x = \sqrt{3}$ 时, $t = \frac{\pi}{3}$,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\tan^2 t \cdot \sec t} \sec^2 t dt \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos t}{\sin^2 t} dt \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin^2 t} d \sin t \\ &= -\frac{1}{\sin t} \bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \sqrt{2} - \frac{2}{3} \sqrt{3}. \end{aligned}$$

例 17. 已知函数 $f(x)$ 在 $[-a, a]$ 上连续, 且 $a > 0$, 证明:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)] dx.$$



证明：由题可知 $\int_0^a [f(x) + f(-x)] dx = \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(-x) dx$,

令 $-x = t$, 则 $x = -t$, $dx = -dt$,

当 $x = 0$ 时, $t = 0$; 当 $x = a$ 时, $t = -a$,

所以 $\int_0^a f(-x) dx = \int_0^{-a} f(t) \cdot (-dt) = \int_{-a}^0 f(t) dt = \int_{-a}^0 f(x) dx$,

则 $\int_0^a [f(x) + f(-x)] dx = \int_0^a f(x) dx + \int_{-a}^0 f(x) dx = \int_{-a}^a f(x) dx$.

2. 定积分的分部积分法

设函数 $u(x)$, $v(x)$ 在 $[a, b]$ 上具有连续导数, 则

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

此公式称为定积分的分部积分公式.

分部积分法口诀：反对幂三指，谁在后谁为 v' .

注：一般情况下，分部积分计算时可以边积边代限简化运算.

例 18. 计算 $\int_1^e x \ln x dx$.

解：原式 $= \frac{1}{2} \int_1^e \ln x dx^2$

$$= \frac{1}{2} x^2 \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x^2 d \ln x$$

$$= \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} \int_1^e x^2 \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{4} x^2 \Big|_1^e$$

$$= \frac{1}{4} (e^2 + 1).$$

例 19. 计算 $\int_0^1 x \sin x dx$.

解：原式 $= - \int_0^1 x d \cos x$



$$\begin{aligned}
 &= -x \cos x \Big|_0^1 + \int_0^1 \cos x \, dx \\
 &= -\cos 1 + \sin x \Big|_0^1 \\
 &= \sin 1 - \cos 1.
 \end{aligned}$$

例 20. 计算 $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x \, dx$.

$$\begin{aligned}
 \text{解: 原式} &= x \arcsin x \Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, d(1-x^2) \\
 &= \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2} \times 2\sqrt{1-x^2} \Big|_0^{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1.
 \end{aligned}$$

例 21. 计算 $\int_1^e \sin(\ln x) \, dx$.

$$\begin{aligned}
 \text{解: 原式} &= x \sin(\ln x) \Big|_1^e - \int_1^e x \, d \sin(\ln x) \\
 &= e \sin 1 - \int_1^e x \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x} \, dx \\
 &= e \sin 1 - x \cos(\ln x) \Big|_1^e - \int_1^e x \sin(\ln x) \cdot \frac{1}{x} \, dx \\
 &= e \sin 1 - e \cos 1 + 1 - \int_1^e \sin(\ln x) \, dx
 \end{aligned}$$

综上所述, $\int_1^e \sin(\ln x) \, dx = e \sin 1 - e \cos 1 + 1 - \int_1^e \sin(\ln x) \, dx$,

$$\text{所以 } \int_1^e \sin(\ln x) \, dx = \frac{1}{2} (e \sin 1 - e \cos 1 + 1).$$

例 22. 计算 $\int_1^2 e^{\sqrt{x-1}} \, dx$.

解: 令 $t = \sqrt{x-1}$, 则 $x = t^2 + 1$, $dx = 2t \, dt$,



当 $x=1$ 时, $t=0$, 当 $x=2$ 时, $t=1$,

$$\text{原式} = \int_0^1 e^t \cdot 2t \, dt$$

$$= \int_0^1 2t \, de^t$$

$$= 2te^t \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 e^t \, dt$$

$$= 2e - 2e^t \Big|_0^1 = 2.$$

五、变限积分函数及其导数

设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 对于 $f(x)$ 在部分区间 $[a, x]$ 上的定积分

$$\int_a^x f(t) \, dt,$$

称为变上限积分函数.

若函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 那么变上限积分函数

$$\int_a^x f(t) \, dt,$$

在 $[a, b]$ 上可导, 它的导数

$$\Phi'(x) = \left(\int_a^x f(t) \, dt \right)' = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) \, dt = f(x).$$

该定理说明连续函数的原函数是存在的, 同时提供了利用原函数计算定积分的方法.

推论 1 设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 则 $\left(\int_x^b f(t) \, dt \right)' = -f(x)$,

$\int_x^a f(t) \, dt$ 称为变下限积分函数.

推论 2 设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, $h(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, 则

$$\left(\int_{h(x)}^{g(x)} f(t) \, dt \right)' = f[g(x)]g'(x) - f[h(x)]h'(x).$$

推论 3 设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, 则

$$\left(\int_a^{g(x)} f(t) \, dt \right)' = f[g(x)]g'(x).$$



推论 4 设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, $h(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, 则

$$\left(\int_{h(x)}^b f(t) dt\right)' = -f[h(x)]h'(x).$$

例 23. 求 $y = \int_1^x t \sin 2t dt$ 的导数.

解: $y' = \left(\int_1^x t \sin 2t dt\right)' = x \sin 2x.$

例 24. 求 $y = \int_{\sin x}^0 \ln(1+t^2) dt$ 的导数.

解: $y' = \left[\int_{\sin x}^0 \ln(1+t^2) dt\right]' = -\ln(1+\sin^2 x) \cdot \cos x.$

例 25. 求 $\frac{d}{dx} \int_{\sin x}^{\cos x} \cos(\pi t^2) dt =$ _____.

解: $\frac{d}{dx} \int_{\sin x}^{\cos x} \cos(\pi t^2) dt = -\sin x \cos(\pi \cos^2 x) - \cos(\pi \sin^2 x) \cos x.$

例 26. 设连续函数 $f(x)$ 满足 $y = \int_1^x x^2 f(t) dt$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

解: 因为 $y = x^2 \int_1^x f(t) dt$,

所以 $\frac{dy}{dx} = 2x \int_1^x f(t) dt + x^2 f(x).$

例 27. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t \arcsin t dt}{2e^x - x^2 - 2x - 2}.$

解: 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \arcsin x}{2e^x - 2x - 2}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2e^x - 2x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{2e^x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1.$$



例 28. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin x} (1+t)^{\frac{1}{t}} dt}{\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt}$.

解: 原式 = $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \sin x)^{\frac{1}{\sin x}} \cos x}{\frac{\sin x}{x}}$

= $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot (1 + \sin x)^{\frac{1}{\sin x}} \cos x}{x}$

= $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{\sin x}} \cos x$

= e.

六、广义积分

1. 无穷区间的广义积分—有如下三种情形

设 $f(x)$ 的一个原函数为 $F(x)$, 则无穷区间的广义积分如下:

(1) $\int_a^{+\infty} f(x) dx = F(x) \Big|_a^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) - F(a).$

(2) $\int_{-\infty}^b f(x) dx = F(x) \Big|_{-\infty}^b = F(b) - \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x).$

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = F(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x).$

注: ①当上述极限存在时, 称广义积分收敛, 否则发散;

②关于在 (3) 中, 只有当 $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$ 同时存在时原广义积分收敛, 否则发散.

③由于上述三类广义积分的积分区间都是无穷区间, 所以把它们统称为无穷区间上的广义积分, 也称为无穷积分.

例 29. 计算 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$, 并判断其敛散性.

解: 原式 = $\arctan x \Big|_{-\infty}^{+\infty}$



$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x - \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x \\
 &= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.
 \end{aligned}$$

故该广义积分收敛.

例 30. 判断 $\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx$ 的敛散性.

$$\begin{aligned}
 \text{解: 原式} &= -\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \sin \frac{1}{x} d\frac{1}{x} \\
 &= \cos \frac{1}{x} \Big|_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos \frac{1}{x} - \cos \frac{\pi}{2} \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

故该广义积分收敛.

例 31. 广义积分 $\int_0^{+\infty} e^{-kx} dx$ 收敛的条件是 ().

A. $k > 0$

B. $k < 0$

C. $k \geq 0$

D. $k \leq 0$

$$\begin{aligned}
 \text{解: 原式} &= -\frac{1}{k} e^{-kx} \Big|_0^{+\infty} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{k} e^{-kx} + \frac{1}{k}
 \end{aligned}$$

显然 $k \neq 0$, 要使该广义积分收敛, 故 $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{k} e^{-kx}$ 一定为常数, 即 $k > 0$,

故本题答案为 A 项.

2. 无界函数的广义积分—有如下三种情形

(1) 设函数 $f(x)$ 在区间 $(a, b]$ 上连续, 且 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$, 称 $x = a$ 为 $f(x)$ 的无穷间断点 (又称为瑕点);



$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - \lim_{x \rightarrow a^+} F(x).$$

(2) 若 b 为瑕点, 即 $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \infty$, $f(x)$ 在区间 $[a, b)$ 上的广义积分为

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) - F(a).$$

(3) 若 $x=c$ 在 $[a, b]$ 内部, 则 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的广义积分为

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^c + F(x) \Big|_c^b \\ &= \lim_{x \rightarrow c^-} F(x) - F(a) + F(b) - \lim_{x \rightarrow c^+} F(x). \end{aligned}$$

注: ①一般在专升本高等数学考试中, 广义积分的两种类型都容易考查到, 无限区间的广义积分容易区别, 但无界函数的广义积分不易区分, 一般只有在出现广义积分字样时需要考虑无界函数的广义积分, 而一般的积分没有出现“广义积分”字样不需要考虑是不是广义积分, 后续不再提及;

②当上述极限存在时, 称广义积分收敛, 否则发散.

例 32. 判断 $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$ 的敛散性.

解: 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$, 故 $x=0$ 为瑕点,

$$\text{所以 } \int_0^1 \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_0^1 = -1 + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty,$$

故该广义积分发散.

例 33. 判断 $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ 的敛散性.

解: 因为 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \infty$, 故 $x=1$ 为瑕点,

$$\begin{aligned} \text{所以 } \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} d(1-x^2) \\ &= -\frac{1}{2} \times 2\sqrt{1-x^2} \Big|_0^1 \\ &= -\frac{1}{2} \times 2\sqrt{1-1} + \frac{1}{2} \times 2\sqrt{1-0} = 1. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= -\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{1-x^2} + 1 \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

故该广义积分收敛.

例 34. 判断 $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx$ 的敛散性.

解: 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$, 故 $x = 0$ 为瑕点,

$$\begin{aligned}
 \text{所以 } \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx &= \int_{-1}^0 \frac{1}{x^2} dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2} dx \\
 &= -\frac{1}{x} \Big|_{-1}^0 - \frac{1}{x} \Big|_0^1 \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(-\frac{1}{x} \right) + (-1) - 1 + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \\
 &= \infty.
 \end{aligned}$$

故该广义积分发散.



第三节 定积分的应用

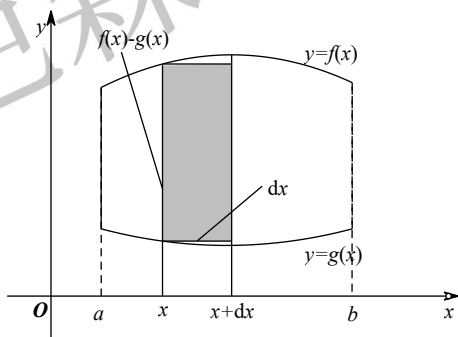
本节学习目标

1. 了解定积分的微元法，会求平面图形的面积及平面图形绕坐标轴旋转的旋转体的体积.

一、平面图形的面积

1. 平面图形是 X -型域

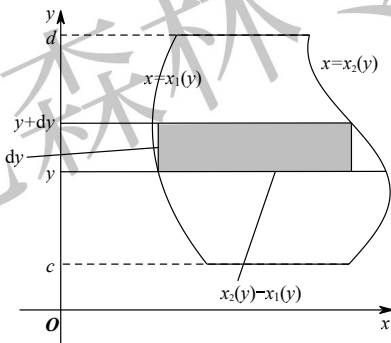
设连续曲线 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 与 $x = a, x = b (a < b)$ 所围成的平面图形，如下图所示，其中 $g(x) \leq f(x)$ ，这样的区域称为 X -型域，其面积用微元法如下：



$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$$

2. 平面图形是 Y -型域

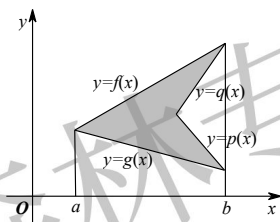
设连续曲线 $x = x_1(y)$ 与 $x = x_2(y)$ 与 $y = c, y = d (c < d)$ 所围成的平面图形，如下图所示，其中 $x_1(y) \leq x_2(y)$ ，这样的区域称为 Y -型域，其面积用微元法如下：



$$A = \int_c^d [x_2(y) - x_1(y)] dy.$$

3. 区域不是 X (或 Y)—型域

可以拆分为几个 X (或 Y)—型区域的组合, 分别计算之后相加即可. 如下图:

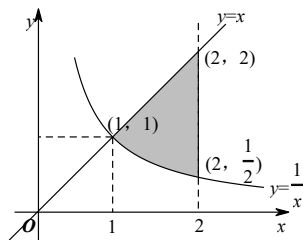


注: 选择积分变量的原则: 积分容易; 尽量少分块.

例 1. 求由 $y = x$ 与直线 $y = \frac{1}{x}$ 和直线 $x = 2$ 所围成的图形的面积.

解: 如图所示, 确定区域为 X -型, 则

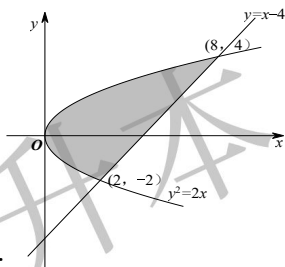
$$S = \int_1^2 \left(x - \frac{1}{x} \right) dx = \left(\frac{1}{2} x^2 - \ln|x| \right) \Big|_1^2 = \frac{3}{2} - \ln 2.$$



例 2. 求由曲线 $y^2 = 2x$ 与直线 $y = x - 4$ 所围成的图形的面积.

解: 如图所示, 确定区域为 Y -型, 则

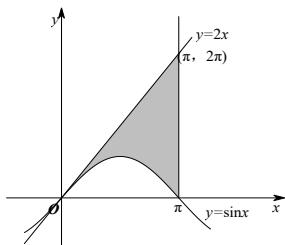
$$S = \int_{-2}^4 \left(4 + y - \frac{1}{2} y^2 \right) dy = \left(4y + \frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{6} y^3 \right) \Big|_{-2}^4 = 18.$$



例 3. 求由曲线 $y = \sin x$ 与直线 $y = 2x$ 及 $x = \pi$ 所围成的图形的面积.

解: 如图所示, 确定区域为 X -型, 则

$$S = \int_0^{\pi} (2x - \sin x) dx = (x^2 + \cos x) \Big|_0^{\pi} = \pi^2 - 2.$$



二、平面图形绕坐标轴旋转的旋转体的体积

旋转体就是由一个平面图形绕这平面内一条直线旋转一周而成的立体. 这条直线

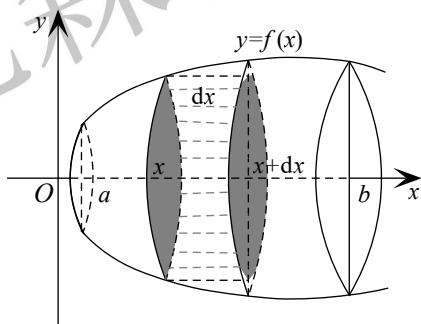


叫做旋转轴.圆柱、圆锥、圆台、球可以分别看成是由矩形绕它的一条边、直角三角形绕它的直角边、直角梯形绕它的直角腰、半圆绕它的直径旋转一周而成的立体，所以它们都是旋转体.

设所给立体垂直于 x 轴的截面面积为 $A(x)$ ， $A(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续，则立体的体积为

$$V = \int_a^b A(x) dx.$$

设旋转体是由连续曲线 $y = f(x)$ ，直线 $x = a$ ， $x = b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周所成的旋转体体积，如下图所示.



现在我们考虑用定积分的微元法来计算旋转体的体积.

取横坐标 x 为积分变量，在区间 $[a, b]$ 上任取一个小区间 $[x, x + dx]$ 的窄边梯形绕 x 轴旋转而成的小圆柱体体积，近似于以 $f(x)$ 为底圆半径， dx 为高的体积记为：

$$dV = \pi[f(x)]^2 dx.$$

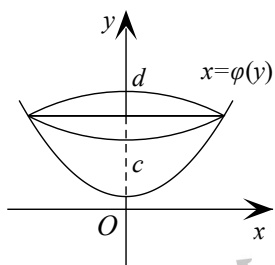
以 $\pi[f(x)]^2 dx$ 为被积表达式，在闭区间 $[a, b]$ 上作定积分，便得旋转体体积为

$$V_x = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

以上公式是曲边梯形绕 x 轴旋转的旋转体体积.

同理，设连续曲线 $x = g(y)$ ，直线 $y = c$ ， $y = d (c < d)$ 及 y 轴所围成的曲边梯形绕 y 轴旋转一周所成的旋转体体积





$$V_y = \pi \int_c^d [g(y)]^2 dy.$$

例 4. 过抛物线 $y = x^2 + 1$ 上点 $(1, 2)$ 做切线, 该切线与曲线及 y 轴围成的平面图形 D .

(1) 求切线方程;

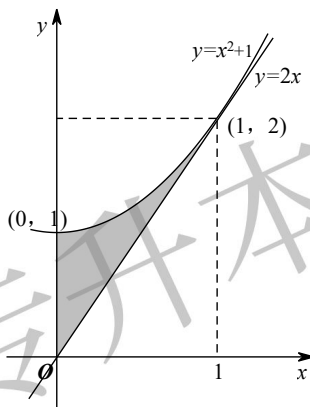
(2) D 绕 x 轴旋转一周所生成的旋转体体积.

解: (1) 由题可知, 因为 $(1, 2)$ 在曲线 $y = x^2 + 1$ 上, 故 $(1, 2)$ 为切点,

$k_{\text{切}} = y'|_{x=1} = 2x|_{x=1} = 2$, 所以切线方程为 $y - 2 = 2(x - 1)$, 即 $y = 2x$.

(2) 如图所示, D 绕 x 轴旋转一周所生成的旋转体体积为

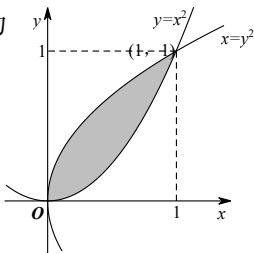
$$\begin{aligned} V_x &= \pi \int_0^1 [(x^2 + 1)^2 - (2x)^2] dx \\ &= \pi \int_0^1 (x^2 + 1)^2 dx - \pi \int_0^1 (2x)^2 dx \\ &= \pi \int_0^1 (x^4 + 2x^2 + 1) dx - 4\pi \int_0^1 x^2 dx \\ &= \pi \left(\frac{1}{5} x^5 + \frac{2}{3} x^3 + x \right) \Big|_0^1 - 4\pi \cdot \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^1 \\ &= \frac{8\pi}{15}. \end{aligned}$$



例 5. 求曲线 $y = x^2$, $x = y^2$ 围成的平面图形绕 y 轴旋转一周所得的旋转体体积.

解: 如下图所示, 该图形绕 y 轴旋转一周所得的旋转体体积为

$$\begin{aligned} V_y &= \pi \int_0^1 (\sqrt{y})^2 dy - \pi \int_0^1 (y^2)^2 dy \\ &= \pi \times \frac{1}{2} y^2 \Big|_0^1 - \frac{1}{5} \pi y^5 \Big|_0^1 = \frac{3\pi}{10}. \end{aligned}$$



第四章 多元函数微积分学

第一节 多元函数微分学

本节学习目标

1. 理解二元函数的概念, 会求一些简单二元函数的定义域.
2. 了解二元函数的极限、连续的定义及其基本性质.
3. 熟练掌握显函数的一阶、二阶偏导数的求法, 了解高阶偏导数的求法.
4. 会求二元函数的极值, 会用拉格朗日乘数法求条件极值.
5. 熟练掌握二元函数全微分的求法.

一、多元函数概念

1. 二元函数定义

设 D 是数集 $\mathbf{R}^2$ 的一个非空子集, 称映射 $f: D \rightarrow \mathbf{R}$ 为定义在 D 上的二元函数, 通常记为

$$z = f(x, y), (x, y) \in D,$$

其中点集 D 称为函数的定义域, x 和 y 称为自变量, z 称为因变量, 全体函数值 $f(x, y)$ 所构成的集合称为函数的值域.

2. 二元函数的定义域

二元函数的定义域与一元函数类似, 在讨论二元函数的算式表达式时, 以使这个算式有意义的所有点集为这个二元函数的自然定义域.

3. 二元函数的几何意义

设 D 是二元函数 $z = f(x, y)$ 的自然定义域, 则空间点集

$$\{(x, y, z) | z = f(x, y), (x, y) \in D\},$$

称为二元函数 $z = f(x, y)$ 的图形, 一般情况下, 它在空间表示一张曲面.

例 1. 求函数 $z = \ln(y^2 - 2x + 1)$ 的定义域.

解: 由题可知, 该二元函数需满足 $y^2 - 2x + 1 > 0$ 即可,

即定义域为 $\{(x, y) | y^2 - 2x + 1 > 0\}$.



例 2. 求函数 $z = \sqrt{x - \sqrt{y}}$ 的定义域.

解: 由题意可得, 该二元函数定义域满足 $\begin{cases} x - \sqrt{y} \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$,

即 $\begin{cases} x \geq \sqrt{y} \\ y \geq 0 \end{cases}$, 解得定义域为 $D = \{(x, y) | x \geq \sqrt{y}, y \geq 0\}$.

例 3. 求函数 $f(x, y) = \frac{\arcsin(3 - x^2 - y^2)}{\sqrt{x - y^2}}$ 的定义域.

解: 由题意可得, 该二元函数定义域满足 $\begin{cases} -1 \leq 3 - x^2 - y^2 \leq 1 \\ x - y^2 > 0 \end{cases}$,

即 $\begin{cases} 2 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \\ x > y^2 \end{cases}$, 解得定义域为 $D = \{(x, y) | 2 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x > y^2\}$.

4. 二元函数的极限

设函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某个邻域内有定义, $P(x, y)$ 为该邻域内任意一点, 若点 P 沿任意途径趋向于 P_0 时, 函数 $f(x, y)$ 趋向于一个确定的常数 A , 则常数 A 叫做函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P(x, y)$ 趋向于 $P_0(x_0, y_0)$ 时的极限, 记为

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A \text{ 或 } \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = A.$$

为了区别于一元函数的极限, 我们把二元函数的极限叫做**二重极限**.

注: (1) 函数在某点是否存在极限与函数在这点是否有定义无关;

(2) 二元函数的极限运算, 除洛必达法则以外, 其余与一元函数求极限的运算法则类似.

例 4. 求 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 2)} \frac{\sin(xy)}{x}$.

解: 因为 $(x, y) \rightarrow (0, 2)$ 时, $\sin(xy) \sim xy$, 故

$$\text{原式} = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 2)} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot y$$



$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot \lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} y = 1 \cdot 2 = 2.$$

例 5. 求 $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 5}} \frac{xy}{x^2 + y^2}.$

解: 原式 $= \frac{10}{29}.$

例 6. 求 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2xy}{\sqrt{xy+1}-1}.$

解: 原式 $= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2xy(\sqrt{xy+1}+1)}{(\sqrt{xy+1}-1)(\sqrt{xy+1}+1)}$
 $= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2xy(\sqrt{xy+1}+1)}{xy}$
 $= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} 2(\sqrt{xy+1}+1) = 4.$

例 7. 求 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)e^{(x^2 + y^2)}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

解: 原式 $= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\frac{1}{2}(x^2 + y^2)^2}{(x^2 + y^2)e^{(x^2 + y^2)}}$
 $= \frac{1}{2} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y^2}{e^{(x^2 + y^2)}}$
 $= 0.$

5. 二元函数连续的定义

设二元函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某一邻域范围内有定义, 如果

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

则称二元函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续.

注: 多元初等函数在其定义域内都是连续的.



二、多元函数的偏导数

1. 一阶偏导数的定义

设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某一邻域内有定义, 当 y 固定在 y_0 , 而 x 在 x_0 处有增量 Δx 时, 相应的函数有增量

$$f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0),$$

如果

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

存在, 则称此极限值为函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处对 x 的偏导数, 记作

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}, \quad \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}, \quad z'_x \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \text{ 或 } f'_x(x_0, y_0).$$

类似地, 可以定义函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处对 y 的偏导数定义为

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y},$$

记作

$$\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}, \quad \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}, \quad z'_y \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \text{ 或 } f'_y(x_0, y_0).$$

如果 $z = f(x, y)$ 在区域 D 内每一点 (x, y) 处对 x 的偏导数都存在, 那么这个偏导数就是 x 的偏导函数, 它就称为 $z = f(x, y)$ 对 x 的偏导函数, 记为 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 或 $f'_x(x, y)$.

其中

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

类似可定义 $z = f(x, y)$ 对 y 的偏导函数, 记为 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 或 $f'_y(x, y)$.

其中

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

注: (1) $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处对 x 的偏导数值 $f'_x(x_0, y_0)$ 就是偏导数 $f'_x(x, y)$ 在



点 (x_0, y_0) 处的函数值; $f'_y(x_0, y_0)$ 就是偏导数 $f'_y(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的函数值;

(2) 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 时, 把 y 看作常量而对 x 求导;

求 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 时, 把 x 看作常量而对 y 求导.

例 8. 已知 $z = x^2 + 3xy + y^2$, 求在 $(1, 2)$ 点处的一阶偏导数.

解: (法一) 对 x 求一阶偏导时, 把 y 当做常数, 则

$$z'_x(x, y) = 2x + 3y,$$

对 y 求一阶偏导时, 把 x 当做常数, 则

$$z'_y(x, y) = 3x + 2y,$$

所以在 $(1, 2)$ 点处的偏导数为

$$z'_x(1, 2) = 8, \quad z'_y(1, 2) = 7.$$

(法二) 在 $(1, 2)$ 点处, 对 x 求一阶偏导时, 把 y 当做常数,

而常数在求导过程前后不变, 故对 x 求导可将 y 值先代入, 即

$$z(x, 2) = x^2 + 6x + 4, \text{ 所以 } z'_x(x, 2) = 2x + 6, \text{ 故 } z'_x(1, 2) = 8,$$

同理在 $(1, 2)$ 点处, 对 y 求一阶偏导时, 把 x 当做常数,

而常数在求导过程前后不变, 故对 y 求导可将 x 值先代入, 即

$$z(1, y) = 1 + 3y + y^2, \text{ 所以 } z'_y(1, y) = 3 + 2y, \text{ 故 } z'_y(1, 2) = 7.$$

注: 以后在求一阶偏导数值时, 往往采用法二将其化为一元函数后再求导, 会简化计算, 对某一变量求导时, 将其余变量全部看作常数即可.

例 9. 设 $f(x, y) = x + (y-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}$, 求 $f'_x(x, 1) =$ _____.

解: $f'_x(x, 1)$ 表示对 x 求一阶偏导数, 在 $(x, 1)$ 处的偏导数值,

因为 $f(x, 1) = x$, 所以 $f'_x(x, 1) = 1$.

例 10. 已知 $z = x^2y + x\sin y$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.



解: $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy + \sin y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + x \cos y$.

例 11. 设 $z = x^{2025} e^x \cos 2y + 2025$, 则 $\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{\substack{x=1 \\ y=0}} = (\quad)$.

A. 0

B. 1

C. $2025 + e$ D. $-2e$

解: 对 y 求一阶偏导时, 把 x 当做常数, 故 $z(1, y) = e \cos 2y + 2025$,

$\frac{\partial z}{\partial y} = -2e \sin 2y$, 所以 $\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{\substack{x=1 \\ y=0}} = 0$, 故本题答案为 A 项.

例 12. 已知函数 $z = x e^{\frac{y}{x}}$, 证明: $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z$.

证明: 由题可知, $\frac{\partial z}{\partial x} = e^{\frac{y}{x}} + x e^{\frac{y}{x}} \cdot y \left(-\frac{1}{x^2}\right) = e^{\frac{y}{x}} \left(1 - \frac{y}{x}\right)$,

$\frac{\partial z}{\partial y} = x e^{\frac{y}{x}} \cdot \frac{1}{x} = e^{\frac{y}{x}}$, 故 $x \frac{\partial z}{\partial x} = (x - y) e^{\frac{y}{x}}$,

$y \frac{\partial z}{\partial y} = y e^{\frac{y}{x}}$, 所以 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = (x - y) e^{\frac{y}{x}} + y e^{\frac{y}{x}} = x e^{\frac{y}{x}} = z$.

2. 二阶偏导数

设函数 $z = f(x, y)$ 在区域 D 内具有偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y),$$

于是在 D 内 $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ 都是 x , y 的函数, 如果这两个函数的偏导数也存在, 那么称它们是函数 $z = f(x, y)$ 的二阶偏导数, 按照对变量的求导次序的不同, 有下列四个二阶偏导数:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y).$$



其中第二、三两个偏导数称为混合偏导数.

注: 如果函数 $z = f(x, y)$ 的两个混合 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ 偏导数在区域 D 内连续, 那么在该区域内两个混合偏导数一定相等. 此时, 求函数 $z = f(x, y)$ 的二阶混合偏导数时就与次序无关了.

例 13. 设 $z = x^3 \sin(x^2 + y^2)$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

解: 因为 $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 \sin(x^2 + y^2) + x^3 \cos(x^2 + y^2) \cdot 2x$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 3x^2 \cos(x^2 + y^2) \cdot 2y - 2x^4 \sin(x^2 + y^2) \cdot 2y.$$

例 14. 求 $z = \arctan \frac{y}{x}$ 的二阶偏导数.

解: 因为 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot y \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{-y}{x^2 + y^2}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

所以 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

例 15. 设 $z = \ln(x^2 y + e^{xy})$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{\substack{x=1 \\ y=1}}$.

解: (法一) 因为 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x^2 y + e^{xy}} (2xy + ye^{xy})$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{(2y + y^2 e^{xy})(x^2 y + e^{xy}) - (2xy + ye^{xy})(2xy + ye^{xy})}{(x^2 y + e^{xy})^2},$$



$$\text{所以 } \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right|_{\substack{x=1 \\ y=1}} = \frac{-(2+e)}{(1+e)^2}.$$

(法二) 由题意可知, 因为对 x 求二阶偏导数时, 先求一阶偏导数,

对 x 求一阶偏导数时, 把 y 当做常数; 再对 x 求二阶偏导数时, 还是把 y 当做常数; 所以对 x 求二阶纯偏导数, 可先将 y 值代入,

$$\text{即 } z(x, 1) = \ln(x^2 + e^x),$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x^2 + e^x} \cdot (2x + e^x), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{(2+e^x)(x^2 + e^x) - (2x + e^x)^2}{(x^2 + e^x)^2},$$

$$\text{所以 } \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right|_{\substack{x=1 \\ y=1}} = \frac{-(2+e)}{(1+e)^2}.$$

注: 求二阶偏导数的纯偏导数值时, 可将另一变量当做常数, 先将其代入后把原函数化为一元函数再求导能简化计算, 但此结论只适用于求二阶偏导数的纯偏导值, 求混合偏导数值时不再适用.

3. 二元隐函数的导数

设函数 $F(x, y, z)$ 在点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 的某一邻域内具有连续偏导数, 且

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0, \quad \text{则方程 } F(x, y, z) = 0 \text{ 在点 } (x_0, y_0, z_0)$$

的某一邻域内恒能唯一确定一个连续且具有连续偏导数的函数 $z = f(x, y)$, 它满足条件 $z_0 = f(x_0, y_0)$, 并有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

例 16. 求由 $x + 2y + z = 2\sqrt{xyz}$ 所确定的函数 $z = f(x, y)$ 的偏导数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解: 令 $F(x, y, z) = x + 2y + z - 2\sqrt{xyz}$,

$$F'_x(x, y, z) = 1 - 2 \times \frac{1}{2\sqrt{xyz}} \cdot yz = \frac{\sqrt{xyz} - yz}{\sqrt{xyz}},$$



$$F'_y(x, y, z) = 2 - 2 \times \frac{1}{2\sqrt{xyz}} \cdot xz = \frac{2\sqrt{xyz} - xz}{\sqrt{xyz}},$$

$$F'_z(x, y, z) = 1 - 2 \times \frac{1}{2\sqrt{xyz}} \cdot xy = \frac{\sqrt{xyz} - xy}{\sqrt{xyz}},$$

$$\text{所以 } \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{\frac{\sqrt{xyz} - yz}{\sqrt{xyz}}}{\frac{\sqrt{xyz} - xy}{\sqrt{xyz}}} = \frac{yz - \sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz} - xy},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{\frac{2\sqrt{xyz} - xz}{\sqrt{xyz}}}{\frac{\sqrt{xyz} - xy}{\sqrt{xyz}}} = \frac{xz - 2\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz} - xy}.$$

例 17. 设方程 $2^x + yz = e^{xyz}$ 所确定的函数 $z = f(x, y)$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解: 令 $F(x, y, z) = 2^x + yz - e^{xyz}$,

$$F'_x(x, y, z) = 2^x \ln 2 - e^{xyz} \cdot yz,$$

$$F'_y(x, y, z) = z - e^{xyz} \cdot xz,$$

$$F'_z(x, y, z) = y - e^{xyz} \cdot xy,$$

$$\text{所以 } \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{2^x \ln 2 - yze^{xyz}}{y - xye^{xyz}} = \frac{yze^{xyz} - 2^x \ln 2}{y - xye^{xyz}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{z - xze^{xyz}}{y - xye^{xyz}} = \frac{xze^{xyz} - z}{y - xye^{xyz}}.$$

例 18. 设 $2 \sin(x + 2y - 3z) = x + 2y - 3z$, 证明: $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$.

证明: 令 $F(x, y, z) = 2 \sin(x + 2y - 3z) - x - 2y + 3z$,

$$F'_x(x, y, z) = 2 \cos(x + 2y - 3z) - 1,$$

$$F'_y(x, y, z) = 2 \cos(x + 2y - 3z) \cdot 2 - 2,$$



$$F'_z(x, y, z) = 2 \cos(x + 2y - 3z) \cdot (-3) + 3,$$

$$\text{所以 } \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{2 \cos(x + 2y - 3z) - 1}{3 - 6 \cos(x + 2y - 3z)} = \frac{1 - 2 \cos(x + 2y - 3z)}{3 - 6 \cos(x + 2y - 3z)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{4 \cos(x + 2y - 3z) - 2}{3 - 6 \cos(x + 2y - 3z)} = \frac{2 - 4 \cos(x + 2y - 3z)}{3 - 6 \cos(x + 2y - 3z)},$$

$$\text{则 } \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3 - 6 \cos(x + 2y - 3z)}{3 - 6 \cos(x + 2y - 3z)} = 1, \text{ 得证.}$$

三、全微分

定义 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 的某邻域内有定义, 如果函数在点 (x, y) 处的全增量

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

可表示为

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho),$$

其中 A, B 不依赖于 $\Delta x, \Delta y$, 而仅与 x, y 有关, $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, 那么称函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 处可微分, 而 $A\Delta x + B\Delta y$ 称为函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 处的全微分, 记为

$$dz = A\Delta x + B\Delta y.$$

定理 如果函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 可微分, 那么该函数在点 (x, y) 处的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 与 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 必定存在, 且函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 的全微分为

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y.$$

习惯上, 我们将自变量的增量 Δx 与 Δy 分别记作 dx 与 dy , 并分别称为自变量 x 与 y 的微分. 这样, 函数 $z = f(x, y)$ 的全微分就可写为

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$



例 19. 设 $z = xy^2 + \cos \frac{y}{2}$, 求 dz .

解: 因为 $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy - \frac{1}{2} \sin \frac{y}{2},$$

$$\text{则 } dz = y^2 dx + \left(2xy - \frac{1}{2} \sin \frac{y}{2} \right) dy.$$

例 20. 计算 $z = xe^{xy}$ 在 $(2, 1)$ 处的全微分.

解: 因为 $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$, $\frac{\partial z}{\partial x} = e^{xy} + xye^{xy}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 e^{xy}$,

$$\text{则 } dz = (e^{xy} + xye^{xy})dx + (x^2 e^{xy})dy, \text{ 所以 } dz|_{(2,1)} = 3e^2 dx + 4e^2 dy.$$

四、二元函数的极值

1. 二元函数的极值

定义 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某个邻域内有定义, 对于该邻域内异于 (x_0, y_0) 的任何点 (x, y) , 都有

$$f(x, y) < f(x_0, y_0),$$

则称函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 有极大值 $f(x_0, y_0)$, 点 (x_0, y_0) 为函数 $f(x, y)$ 极大值点.

若对于该邻域内异于 (x_0, y_0) 的任何点 (x, y) , 都有

$$f(x, y) > f(x_0, y_0),$$

则称函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 有极小值 $f(x_0, y_0)$, 点 (x_0, y_0) 为函数 $f(x, y)$ 极小值点.

定理 1 (极值存在的必要条件) 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 具有偏导数, 且在点 (x_0, y_0) 处有极值, 则有

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0.$$



凡是能使 $f'_x(x, y) = 0$, $f'_y(x, y) = 0$ 同时成立的点 (x_0, y_0) 称为函数 $z = f(x, y)$ 的驻点.

定理 2 (极值存在的充分条件) 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某邻域内连续且有一阶及二阶连续偏导数, 又 $f'_x(x_0, y_0) = 0$, $f'_y(x_0, y_0) = 0$.

$$\text{令} \quad f''_{xx}(x_0, y_0) = A, \quad f''_{xy}(x_0, y_0) = B, \quad f''_{yy}(x_0, y_0) = C,$$

则 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处是否取得极值的条件如下:

- (1) $AC - B^2 > 0$ 时具有极值, 且当 $A < 0$ 时有极大值, 当 $A > 0$ 时有极小值;
- (2) $AC - B^2 < 0$ 时没有极值;
- (3) $AC - B^2 = 0$ 时可能有极值, 也可能没有极值, 还需另作讨论.

注: 根据定理 1、定理 2, 二元函数 $z = f(x, y)$ 求极值的步骤如下:

- (1) 令 $\begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \end{cases}$, 求得所有驻点;
- (2) 求得相应的二阶偏导数;
- (3) 对于每一个驻点处, 求出 A, B, C 的值;
- (4) 确定 $AC - B^2$ 的符号, 按照定理 2 判定 $f(x_0, y_0)$ 是不是极值、是极大值还是极小值.

例 21. 求函数 $f(x, y) = e^{2x}(x + y^2 + 4y)$ 的极值.

解: 由题可知, 令 $\begin{cases} f'_x(x, y) = 2e^{2x}(x + y^2 + 4y) + e^{2x} = 0 \\ f'_y(x, y) = e^{2x}(2y + 4) = 0 \end{cases}$,

联立解得驻点 $\left(\frac{7}{2}, -2\right)$,

$$f''_{xx}(x, y) = 4e^{2x}(x + y^2 + 4y + 1), \quad f''_{xy}(x, y) = 4e^{2x}(y + 2), \quad f''_{yy}(x, y) = 2e^{2x},$$

$$\text{在驻点} \left(\frac{7}{2}, -2\right) \text{处, } A = f''_{xx}\left(\frac{7}{2}, -2\right) = 2e^7, \quad B = f''_{xy}\left(\frac{7}{2}, -2\right) = 0,$$

$$C = f''_{yy}\left(\frac{7}{2}, -2\right) = 2e^7,$$



所以 $AC - B^2 > 0$ 且 $A > 0$, 故在该驻点处取得极小值 $f\left(\frac{7}{2}, -2\right) = -\frac{1}{2}e^7$.

例 22. 求函数 $f(x, y) = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值.

解: 由题可知, 令
$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \\ f'_y(x, y) = -3y^2 + 6y = 0 \end{cases},$$

联立解得驻点 $(1, 0), (1, 2), (-3, 0), (-3, 2)$,

$$f''_{xx}(x, y) = 6x + 6, \quad f''_{xy}(x, y) = 0, \quad f''_{yy}(x, y) = -6y + 6,$$

在驻点 $(1, 0)$ 处, $A = f''_{xx}(1, 0) = 12, B = f''_{xy}(1, 0) = 0, C = f''_{yy}(1, 0) = 6$,

所以 $AC - B^2 > 0$ 且 $A > 0$, 故在该驻点处取得极小值 $f(1, 0) = -5$.

在驻点 $(1, 2)$ 处, $A = f''_{xx}(1, 2) = 12, B = f''_{xy}(1, 2) = 0, C = f''_{yy}(1, 2) = -6$,

所以 $AC - B^2 < 0$, 故在该驻点处无极值.

在驻点 $(-3, 0)$ 处, $A = f''_{xx}(-3, 0) = -12, B = f''_{xy}(-3, 0) = 0$,

$C = f''_{yy}(-3, 0) = 6$, 所以 $AC - B^2 < 0$, 故在该驻点处无极值.

在驻点 $(-3, 2)$ 处, $A = f''_{xx}(-3, 2) = -12, B = f''_{xy}(-3, 2) = 0$,

$$C = f''_{yy}(-3, 2) = -6,$$

所以 $AC - B^2 > 0$ 且 $A < 0$, 故在该驻点处有极大值 $f(-3, 2) = 31$.

2. 条件极值 拉格朗日乘数法

上面讨论的极值问题, 对于函数的自变量, 除了限制在函数的定义域内以外, 并无其他条件, 所以有时候称为**无条件极值**.但在实际问题中, 有时会遇到对函数的自变量还有附加条件的极值问题.因此, 对自变量有附加条件的极值称为**条件极值**.下面介绍求条件极值的方法——**拉格朗日乘数法**.

用拉格朗日乘数法求函数 $z = f(x, y)$ 在条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的可能取得极值点的步骤:

(1) 构造拉格朗日函数

$$L(x, y) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y),$$



其中 λ 为拉格朗日乘数;

(2) 求 $L(x, y)$ 对 x, y 的一阶偏导数, 并令其一阶偏导数等于 0, 解方程组

$$\begin{cases} f'_x(x, y) + \lambda \varphi'_x(x, y) = 0, \\ f'_y(x, y) + \lambda \varphi'_y(x, y) = 0, \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases}$$

由这个方程组解出 x, y 及 λ , 这样得到的 (x, y) 就是函数 $f(x, y)$ 在附加条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的可能极值点.

例 23. 求 $z = xy$ 在 $2x + y = 1$ 条件下的极大值.

解: 由题可知, 设拉格朗日函数为

$$L(x, y) = xy + \lambda(2x + y - 1),$$

对其 x, y 求一阶偏导数为

$$\begin{cases} y + 2\lambda = 0, \\ x + \lambda = 0, \\ 2x + y - 1 = 0. \end{cases}$$

$$\text{解得唯一驻点} \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right),$$

由实际意义可得, 该唯一驻点即为极大值点, 即极大值为 $\frac{1}{8}$.

例 24. 某单位通过电视和报纸两种方式做广告, 假定销售收入 R (万元), 电视广告费 U (万元), 报纸广告费 V (万元), 关系:

$R = 17 + 14U + 34V - 8UV - 2U^2 - 10V^2$, 现有广告费 3 万元, 求销售收入 R 最大的广告策略.

解: 由题可知, 要求 R 的最大值, 即目标函数为 R , 附加条件为广告费 3 万元, 即

$$U + V = 3,$$

设拉格朗日函数为

$$L(U, V) = 17 + 14U + 34V - 8UV - 2U^2 - 10V^2 + \lambda(U + V - 3),$$

对其 U, V 求一阶偏导数为



$$\begin{cases} 14 - 8V - 4U + \lambda = 0, \\ 34 - 8U - 20V + \lambda = 0, \\ U + V - 3 = 0. \end{cases}$$

解得唯一驻点 $(2, 1)$,

由实际意义可得, 当电视广告费为 2 万元, 报纸广告费为 1 万元时, 销售收入最大, 最大为 45 万元.



第二节 二重积分

本节学习目标

1. 熟练掌握二重积分的计算方法.

一、二重积分的概念与性质

1. 二重积分的定义

设 $f(x, y)$ 是有界闭区域 D 上的有界函数. 将闭区域 D 任意分成 n 个小闭区域

$$\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n,$$

其中 $\Delta\sigma_i$ 表示第 i 个小闭区域, 也表示它的面积, 在每个 $\Delta\sigma_i$ 上任取一点 (ξ_i, η_i) , 作

乘积 $f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i (i=1, 2, \dots, n)$, 并作和 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$. 如果当各小闭区域的直

径中的最大值 $\lambda \rightarrow 0$ 时, 这的和的极限总存在, 且与闭区域 D 的分法及点 (ξ_i, η_i) 的取

法无关, 那么称此极限为函数 $f(x, y)$ 在闭区域 D 上的二重积分, 记作 $\iint_D f(x, y) d\sigma$,

$$\text{即} \quad \iint_D f(x, y) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i.$$

其中 $f(x, y)$ 叫做被积函数, $f(x, y)d\sigma$ 叫做被积表达式, $d\sigma$ 叫做面积元素, x 与

y 叫做积分变量, D 叫做积分区域, $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$ 叫做积分和.

注: 在直角坐标系中, 有时也把面积元素 $d\sigma$ 记作 $dx dy$, 而把二重积分记作

$$\iint_D f(x, y) dx dy.$$

2. 二重积分的性质

性质 1 设 k 为常数, 则

$$\iint_D kf(x, y) d\sigma = k \iint_D f(x, y) d\sigma.$$

性质 2 设 α 与 β 为常数, 则

$$\iint_D [\alpha f(x, y) \pm \beta g(x, y)] d\sigma = \alpha \iint_D f(x, y) d\sigma \pm \beta \iint_D g(x, y) d\sigma.$$



性质 3 如果闭区域 D 分为两个闭区域 D_1 与 D_2 , 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma.$$

性质 4 如果在 D 上, $f(x, y) = 1$, σ 为 D 的面积, 那么

$$\iint_D d\sigma = \sigma.$$

性质 5 如果在 D 上, $f(x, y) \leq g(x, y)$, 那么有

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \leq \iint_D g(x, y) d\sigma.$$

二、利用直角坐标计算二重积分

1. X 型积分区域

X 型积分区域是指积分区域 D 可以用不等式

$$a \leq x \leq b, \quad \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$$

来表示的闭区域 (如图 4-1), 其中函数 $\varphi_1(x)$ 、 $\varphi_2(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续.

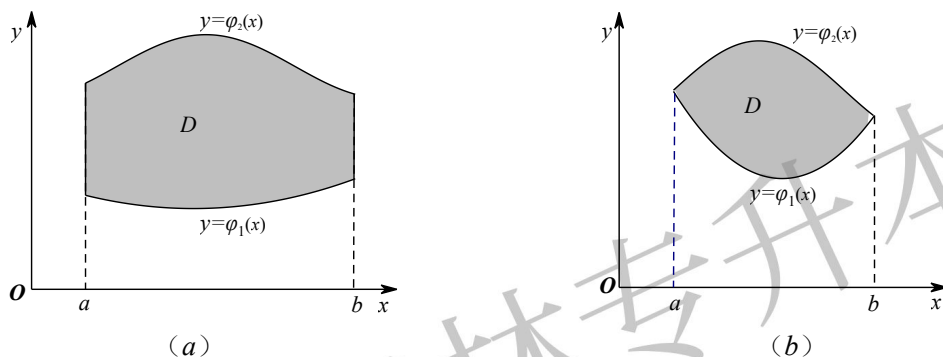


图 4-1

直角坐标系中积分区域为 X 型的二重积分的计算公式为

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy.$$

注: (1) X 型积分区域的二重积分, 在计算时先对 y 积分后, 再对 x 积分.

计算 $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$ 时将 x 当做常数, 对 y 积分即可.

(2) X 型积分区域的特点: 穿过区域且垂直于 x 轴的直线与区域边界相交不多于



两个交点.

2. Y 型积分区域

Y 型积分区域是指积分区域 D 可以用不等式

$$c \leq y \leq d, \quad \varphi_1(y) \leq x \leq \varphi_2(y)$$

来表示的闭区域 (如图 4-2), 其中函数 $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$ 在区间 $[c, d]$ 上连续.

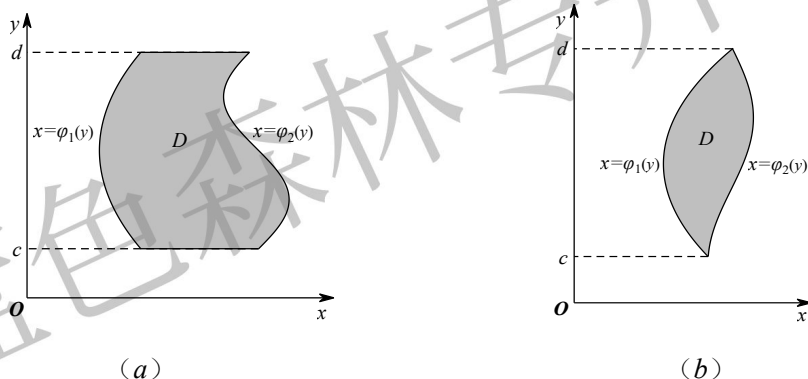


图 4-2

直角坐标系中积分区域为 Y 型的二重积分的计算公式为

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_c^d dy \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y) dx.$$

注: (1) Y 型积分区域的二重积分, 在计算时先对 x 积分后, 再对 y 积分.

计算 $\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y) dx$ 时将 y 当做常数, 对 x 积分即可.

(2) Y 型积分区域的特点: 穿过区域且垂直于 y 轴的直线与区域边界相交不多于两个交点.

3. 积分区域为混合型

若积分区域既不是 X 型积分区域也不是 Y 型积分区域, 如下图 4-3 所示:

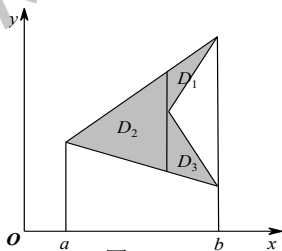


图 4-3



则可以将积分区域分为几部分,使得每个积分区域是 X 型或 Y 型.

如图 4-3 可将积分区域 D 分为 D_1 、 D_2 、 D_3 三个 X 型的积分区域,再根据二重积分的区间可加性得

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_3} f(x, y) d\sigma.$$

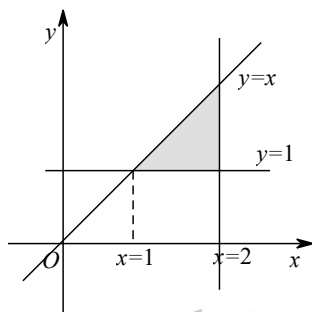
注: 当积分区域既不是 X 型积分区域也不是 Y 型积分区域时,进行分割要尽可能分割的越少越便于计算.

例 1. 计算 $\iint_D xy d\sigma$, 其中 D 是由直线 $y=1$, $x=2$ 及 $y=x$ 所围成的闭区域.

解: (法一) 如图所示, 将积分区域看作 X 型域, 积分区域为 D_x : $\begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ 1 \leq y \leq x \end{cases}$,

所以原式 $\iint_D xy d\sigma = \int_1^2 dx \int_1^x xy dy$

$$\begin{aligned} &= \int_1^2 \frac{1}{2} xy^2 \Big|_1^x dx = \frac{1}{2} \int_1^2 (x^3 - x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{2} x^2 \right) \Big|_1^2 = \frac{9}{8}. \end{aligned}$$



(法二) 如图所示, 将积分区域看作 Y 型域, 积分区域为 D_y : $\begin{cases} 1 \leq y \leq 2 \\ y \leq x \leq 2 \end{cases}$,

所以原式 $\iint_D xy d\sigma = \int_1^2 dy \int_y^2 xy dx$

$$\begin{aligned} &= \int_1^2 \frac{1}{2} yx^2 \Big|_y^2 dy = \frac{1}{2} \int_1^2 (4y - y^3) dy \\ &= \left(y^2 - \frac{1}{8} y^4 \right) \Big|_1^2 = \frac{9}{8}. \end{aligned}$$

例 2. 计算 $\iint_D x \cos(x+y) d\sigma$, 其中 D 是顶点分别为 $(0, 0)$, $(\pi, 0)$ 和 (π, π) 的三角形闭区域.

形闭区域.



解: 如图所示, 积分区域为 $D_x: \begin{cases} 0 \leq x \leq \pi, \\ 0 \leq y \leq x, \end{cases}$

$$\text{所以原式} = \int_0^{\pi} dx \int_0^x x \cos(x+y) dy$$

$$= \int_0^{\pi} x \sin(x+y) \Big|_0^x dx$$

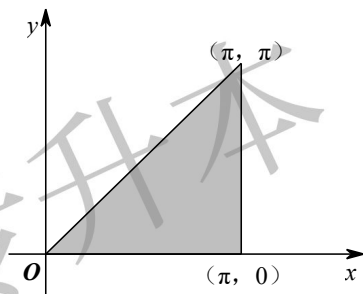
$$= \int_0^{\pi} (x \sin 2x - x \sin x) dx$$

$$= \int_0^{\pi} x d\cos x - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} x d\cos 2x$$

$$= x \cos x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos x dx - \frac{1}{2} \left[x \cos 2x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos 2x dx \right]$$

$$= -\pi - \sin x \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{2} \left(\pi - \frac{1}{2} \sin 2x \Big|_0^{\pi} \right)$$

$$= -\frac{3}{2} \pi.$$



例 3. 计算 $\iint_D xy d\sigma$, 其中 D 是由抛物线 $y^2 = x$ 及直线 $y = x - 2$ 所围成的闭区域.

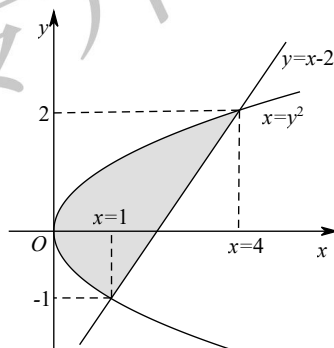
解: 如图所示, 积分区域为 $D_y: \begin{cases} -1 \leq y \leq 2 \\ y^2 \leq x \leq y+2 \end{cases}$,

$$\text{原式} \iint_D xy d\sigma = \int_{-1}^2 dy \int_{y^2}^{y+2} xy dx$$

$$= \int_{-1}^2 \frac{1}{2} y x^2 \Big|_{y^2}^{y+2} dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^2 [y(y+2)^2 - y(y^2)^2] dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^2 (y^3 + 4y^2 + 4y - y^5) dy$$

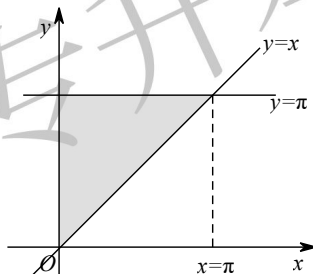


$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} y^4 + \frac{4}{3} y^3 + 2y^2 - \frac{1}{6} y^6 \right) \Big|_{-1}^2 = \frac{45}{8}.$$

例 4. 计算 $\iint_D \frac{\sin y}{y} dx dy$ 其中 D 是由直线 $y=x$, $x=0$ 及 $y=\pi$ 所围成的闭区域.

解: 如图所示, 积分区域为 $D_y: \begin{cases} 0 \leq y \leq \pi, \\ 0 \leq x \leq y, \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{原式 } \iint_D \frac{\sin y}{y} dx dy &= \int_0^\pi dy \int_0^y \frac{\sin y}{y} dx \\ &= \int_0^\pi \frac{\sin y}{y} x \Big|_0^y dy \\ &= \int_0^\pi \sin y dy = -\cos y \Big|_0^\pi = 2. \end{aligned}$$

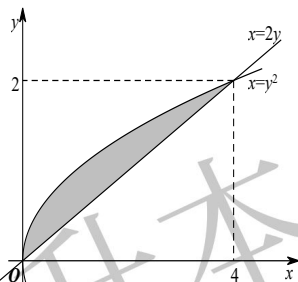


例 5. 交换积分次序: $I = \int_0^2 dy \int_{y^2}^{2y} f(x, y) dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

解: 原积分区域为 $D_y: \begin{cases} 0 \leq y \leq 2 \\ y^2 \leq x \leq 2y \end{cases}$, 如下图所示,

$$\text{新的积分区域为 } D_x: \begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ \frac{1}{2}x \leq y \leq \sqrt{x} \end{cases},$$

$$\text{原式 } I = \int_0^2 dy \int_{y^2}^{2y} f(x, y) dx = \int_0^4 dx \int_{\frac{1}{2}x}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy.$$

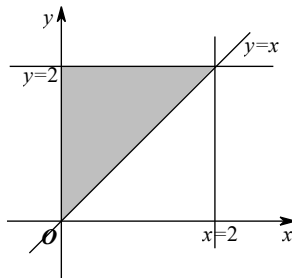


例 6. 计算二重积分 $\int_0^2 dx \int_x^{2-x} e^{-y^2} dy$.

解: 原积分区域为 $D_x: \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ x \leq y \leq 2-x \end{cases}$, 如下图所示,

$$\text{新的积分区域为 } D_y: \begin{cases} 0 \leq y \leq 2 \\ 0 \leq x \leq y \end{cases},$$

$$\text{原式} = \int_0^2 dy \int_0^y e^{-y^2} dx$$



$$\begin{aligned}
&= \int_0^2 x e^{-y^2} \Big|_0^y dy \\
&= \int_0^2 y e^{-y^2} dy \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^2 e^{-y^2} d(-y^2) \\
&= -\frac{1}{2} e^{-y^2} \Big|_0^2 \\
&= \frac{1}{2} (1 - e^{-4}).
\end{aligned}$$

三、利用极坐标计算二重积分

1. 极坐标系

建立极坐标系的方法：在平面内任取一点 O ，作为**极点**，向右水平方向引一条射线 Ox ，叫做**极轴**。如右图 4-4。

在平面内任取一点 M 连接 OM ，称为**极径**，记作 $r = |OM|$ ，从 Ox 到 OM 的角，称为**极角**，记为 $\theta = (\widehat{Ox}, OM)$ ，有序数组 (r, θ) 叫点的**极坐标**。

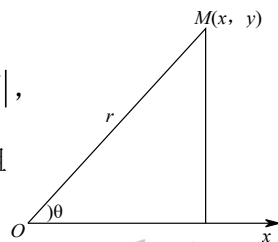


图 4-4

2. 直角坐标系与极坐标系的关系

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}, \quad x^2 + y^2 = r^2, \quad dx dy = r dr d\theta.$$

则直角坐标系下的二重积分可表示为极坐标系下的二重积分的形式如下：

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta.$$

3. 极坐标系下二重积分的计算

(1) 极点在积分区域外（如下图 4-5）的计算公式

$$\text{积分区域 } D: \begin{cases} \alpha \leq \theta \leq \beta \\ \varphi_2(\theta) \leq r \leq \varphi_1(\theta) \end{cases}, \quad \text{此时}$$



$$\iint_D f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{\varphi_2(\theta)}^{\varphi_1(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr.$$

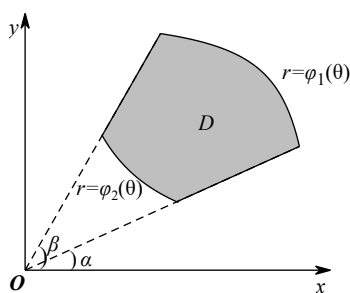


图 4-5

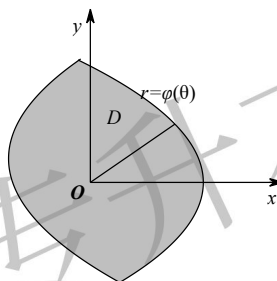


图 4-6

(2) 极点在积分区域内 (如上图 4-6) 的计算公式

积分区域 D : $\begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq \varphi(\theta) \end{cases}$, 此时

$$\iint_D f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\varphi(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr.$$

注: 当积分区域 D 为圆域, 环域或扇形域时, D 的边界用极坐标表示较为简单; 当被积函数具有形如 $f(x^2 + y^2)$, $f(\sqrt{x^2 + y^2})$ 等形式时, 用极坐标计算较为容易.

例 7. 计算二重积分 $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, 积分区域 $D: \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq a^2, y \geq 0, a > 0\}$.

解: 由 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, dx dy = r dr d\theta$,

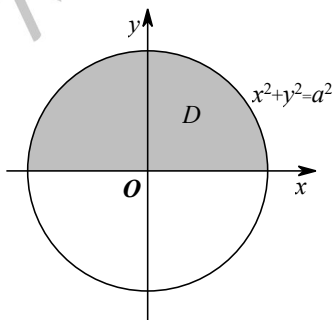
如图所示, 积分区域表示为 $D: \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq r \leq a \end{cases}$

$$\text{原式} = \iint_D r \cdot r dr d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} d\theta \int_0^a r^2 dr$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{1}{3} r^3 \Big|_0^a d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{1}{3} a^3 d\theta$$



$$= \frac{1}{3} a^3 \theta \Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{\pi}{3} a^3.$$

例 8. 计算二重积分 $\iint_D \sqrt{x} dx dy$, 其中积分区域 D 为 $x^2 - 4x + y^2 = 0$ 及 x 轴在一象限围成的区域.

解: 由 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, dx dy = r dr d\theta$,

如图所示, 积分区域表示为 $D: \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq r \leq 4 \cos \theta \end{cases}$

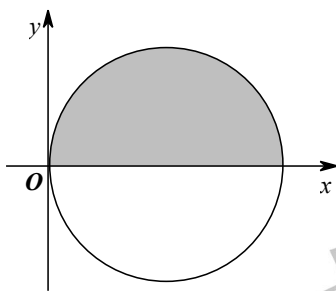
$$\text{原式} = \iint_D \sqrt{r \cos \theta} \cdot r dr d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{4 \cos \theta} \sqrt{\cos \theta} \cdot r^{\frac{3}{2}} dr$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{5} \sqrt{\cos \theta} \cdot r^{\frac{5}{2}} \Big|_0^{4 \cos \theta} d\theta$$

$$= \frac{64}{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta d\theta$$

$$= \frac{64}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{128}{15}.$$

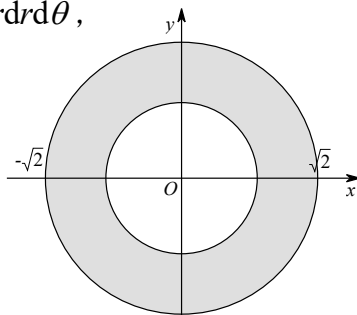


例 9. 计算二重积分 $\iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy$, 其中 $D: \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$.

解: 由题可知, 由 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, dx dy = r dr d\theta$,

如图所示, 积分区域 D 为 $\begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 1 \leq r \leq \sqrt{2} \end{cases}$,

$$\text{原式} \iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy = \iint_D e^{-r^2} r dr d\theta$$



$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^{\sqrt{2}} e^{-r^2} r dr$$

$$= \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2} e^{-r^2} \Big|_1^{\sqrt{2}} d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (e^{-1} - e^{-2}) d\theta$$

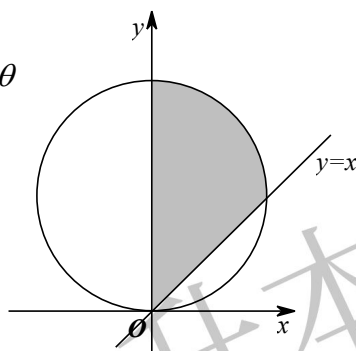
$$= \frac{1}{2} (e^{-1} - e^{-2}) \theta \Big|_0^{2\pi} = \pi(e^{-1} - e^{-2}).$$

例 10. 计算二重积分 $\iint_D 2xy \, dx dy$, 其中积分区域 D 为 $y \geq x$, $x^2 + y^2 \leq 2y$, $x \geq 0$

围成.

解: 由 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $dx dy = r dr d\theta$,

如图所示, 积分区域表示为 $D: \begin{cases} \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq r \leq 2 \sin \theta \end{cases}$



$$\text{原式} = \iint_D 2r \cos \theta \cdot r \sin \theta \cdot r dr d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2 \sin \theta} 2r^3 \sin \theta \cos \theta dr$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} r^4 \sin \theta \cos \theta \Big|_0^{2 \sin \theta} d\theta$$

$$= 8 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 \theta \cos \theta d\theta$$

$$= 8 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 \theta d \sin \theta$$

$$= 8 \times \frac{1}{6} \sin^6 \theta \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{7}{6}.$$



第五章 微分方程

第一节 一阶微分方程

本节学习目标

1. 理解微分方程的定义及阶、解、通解、特解等概念.
2. 熟练掌握可分离变量的微分方程、齐次微分方程及一阶线性微分方程的解法.

一、微分方程的基本概念

1. 微分方程的定义

含有未知函数的导数(或微分)的方程叫做**微分方程**.

例如: $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$, $(x + xy^2)dx + (y - x^2y)dy = 0$, $y''' + xy'' + 2y' = \sin x$ 等.

2. 微分方程的阶

微分方程中所出现的未知函数导数的最高阶导数的阶数, 叫做**微分方程的阶**.

一般地, n 阶常微分方程的形式是

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

例如: $x^3y''' + x^2y'' - 4xy' = 3x^2$ 是三阶微分方程;

$y^{(4)} - 4(y''')^2 + 10y'' - 12y' + 5y = \sin 2x$ 是四阶微分方程.

3. 微分方程的解

- (1) 微分方程的**解**: 将未知函数及其导数代入微分方程, 使方程成为恒等式的函数.
- (2) 微分方程的**通解**: 微分方程的解中含有任意常数, 且任意常数的个数与微分方程的阶数相同.
- (3) 微分方程的**特解**: 确定了通解中的任意常数后, 得到的微分方程的解称为特解.
- (4) 初始条件(初值条件): 确定通解中任意常数为固定值的条件.

例 1. 微分方程 $(y')^2 + 1 = x^3$ 的阶数为 ().

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

解: 显然微分方程中最高阶导数为一阶导, 故该微分方程为一阶微分方程,

故答案选 A.



例 2. 下列各选项中哪个是微分方程 $y'' - 2y' + y = 0$ 的解 ().

A. $y = xe^x$

B. $y = x^2e^x$

C. $y = x \sin x + \ln x$

D. $y = 4x^3 + x^2 - 6$

解: A 项: $y' = e^x + xe^x$, $y'' = e^x + e^x + xe^x = e^x(2+x)$,

$$\text{所以 } y'' - 2y' + y = e^x(2+x) - 2(e^x + xe^x) + xe^x = 0,$$

则 $y = xe^x$ 是该微分方程的解, 故本题答案为 A 项.

B 项: $y' = 2xe^x + x^2e^x$,

$$y'' = 2e^x + 2xe^x + 2xe^x + x^2e^x = 2e^x + 4xe^x + x^2e^x,$$

$$\text{所以 } y'' - 2y' + y = 2e^x + 4xe^x + x^2e^x - 2(2xe^x + x^2e^x) + x^2e^x = 2e^x \neq 0,$$

故 $y = x^2e^x$ 不是该微分方程的解.

C 项: $y' = \sin x + x \cos x + \frac{1}{x}$, $y'' = \cos x + \cos x - x \sin x - \frac{1}{x^2}$,

$$\text{所以 } y'' - 2y' + y = 2 \cos x - x \sin x - \frac{1}{x^2} - 2(\sin x + x \cos x + \frac{1}{x})$$

$$+ x \sin x + \ln x \neq 0, \text{ 故 } y = x \sin x + \ln x \text{ 不是该微分方程的解.}$$

D 项: $y' = 12x^2 + 2x$, $y'' = 24x + 2$,

$$\text{所以 } y'' - 2y' + y = 24x + 2 - 2(12x^2 + 2x) + 4x^3 + x^2 - 6 \neq 0,$$

$$\text{故 } y = 4x^3 + x^2 - 6 \text{ 不是该微分方程的解.}$$

例 3. 已知函数的通解为 $y = (C_1 + C_2x)e^{2x}$, 满足初始条件 $y|_{x=0} = 0$, $y'|_{x=0} = 1$, 求该函数的特解.

解: 因为 $y' = C_2e^{2x} + 2(C_1 + C_2x)e^{2x}$, 且 $y|_{x=0} = 0$, $y'|_{x=0} = 1$,

所以将初始条件代入上式得 $C_2 + 2C_1 = 1$, $C_1 = 0$,

$$\text{解得 } C_1 = 0, C_2 = 1,$$

$$\text{所以特解为 } y = xe^{2x}.$$

二、可分离变量的微分方程



1. 定义

如果一个一阶微分方程能写成

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y).$$

的形式, 称该方程为可分离变量的微分方程.

2. 可分离变量微分方程的求解步骤:

(1) 分离变量, 得

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx,$$

(2) 等式两端同时积分, 得

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx,$$

(3) 求出积分得通解.

例 4. 下列微分方程中, 为可分离变量的微分方程是 ().

A. $xy' - 3y = \sin x$

B. $(x - y \cos x)dy + (y + x^2)dx = 0$

C. $y' = e^{\sin x + \cos y}$

D. $yy' - 4y + 2x = 0$

解: C 项: 因为 $y' = \frac{dy}{dx} = e^{\sin x + \cos y} = e^{\sin x} e^{\cos y}$, 显然为可分离变量的微分方程,

故本题答案为 C 项.

A 项: 等式整理得 $y' - \frac{3}{x}y = \frac{\sin x}{x}$, 显然为一阶非齐次线性微分方程, 故排除.

B 项: 等式整理得 $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y}{y \cos x - x}$, 显然该方程不是可分离变量的微分方程,

故排除.

D 项: 等式整理得 $y' + \frac{2x}{y} = 4$, 显然该方程不是可分离变量的微分方程, 故排除.

例 5. 已知 $\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x}$, 且 $y(2) = 1$, 求微分方程的特解 ().



A. $xy = 2$

B. $y^2 - x^2 = C$

C. $y^2 - x^2 = 3$

D. $y^2 + x^2 = 5$

解：分离变量得 $-y dy = x dx$ ，两边同时积分得 $-\int y dy = \int x dx$ ，

解得 $-\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 + C_1$ 或 $x^2 + y^2 = C$ （其中 $C = -2C_1$ ），

因为 $y(2) = 1$ ，代入通解得 $C = 5$ ，则特解为 $x^2 + y^2 = 5$ ，

故本题答案为 D.

例 6. 求微分方程 $y' = (1+x)(1+y^2)$ 的通解.

解：显然该微分方程为可分离变量的微分方程，

分离变量得 $\frac{1}{1+y^2} dy = (1+x)dx$ ，

两边同时积分得 $\int \frac{1}{1+y^2} dy = \int (1+x)dx$ ，

即通解为 $\arctan y = x + \frac{1}{2}x^2 + C$ 或 $(y = \tan(x + \frac{1}{2}x^2 + C))$ 。

例 7. 求微分方程 $xy' - y \ln y = 0$ 的通解.

解：等式整理得 $y' = \frac{y \ln y}{x}$ ，显然该微分方程为可分离变量的微分方程，

分离变量得 $\frac{1}{y \ln y} dy = \frac{1}{x} dx$ ，

两边同时积分得 $\int \frac{1}{y \ln y} dy = \int \frac{1}{x} dx$ ，

即 $\ln |\ln y| = \ln |x| + \ln |C_1|$ ，整理得 $\ln y = Cx$ （其中 $C = \pm C_1$ ）。

注：一般可分离变量的微分方程通解中含有“ $\ln |$ ”时，往往常数可加“ $\ln |C_1|$ ”，目的是便于化简，一般要求通解化简后尽可能不含有绝对值符号。

例 8. 求微分方程 $dx + xydy = y^2 dx + ydy$ 满足初始条件 $y(0) = 2$ 的特解.



解: 等式整理得 $(x-1)ydy = (y^2-1)dx$,

$$\text{分离变量得 } \frac{y}{y^2-1} dy = \frac{1}{x-1} dx,$$

$$\text{两边同时积分得 } \int \frac{y}{y^2-1} dy = \int \frac{1}{x-1} dx,$$

$$\text{解得 } \frac{1}{2} \ln|y^2-1| = \ln|x-1| + \ln|C_1|,$$

$$\text{化简得 } y^2 = C(x-1)^2 + 1, \text{ (其中 } C = \pm C_1^2 \text{).}$$

$$\text{又因为 } y(0) = 2, \text{ 代入通解得 } C = 3,$$

$$\text{所以特解为 } y^2 = 3(x-1)^2 + 1.$$

三、齐次微分方程

1. 定义

如果一阶微分方程可化成

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

的形式, 称该方程为**齐次方程**.

例如: $y' = \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}}$, $y^2 + x^2 \frac{dy}{dx} = xy \frac{dy}{dx}$ 都是齐次方程.

2. 齐次方程的求解步骤:

$$(1) \text{ 变量代换, 令 } u = \frac{y}{x}, \text{ 则 } y = ux, \text{ 故 } \frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx};$$

$$(2) \text{ 将 } \frac{dy}{dx} \text{ 代入 } \frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \text{ 得 } u + x \frac{du}{dx} = \varphi(u);$$

$$(3) \text{ 分离变量得 } \frac{du}{\varphi(u)-u} = \frac{dx}{x};$$

$$(4) \text{ 两边积分 } \int \frac{du}{\varphi(u)-u} = \int \frac{dx}{x};$$



(5) 求出积分后, 以 $\frac{y}{x}$ 代替 u , 得到通解.

例 9. 下列方程中为齐次微分方程的是 ().

A. $y' = e^{2x-y}$

B. $y' = \frac{y}{x} + \tan \frac{y}{x}$

C. $(x^2 - 1)y' - \sin x \cdot y - \cos x = 0$

D. $y' = e^{x+y}$

解: B 项: 显然 $y' = \frac{y}{x} + \tan \frac{y}{x}$ 的等式右边, 可将其看作一个关于 $\frac{y}{x}$ 的函数,

所以该微分方程为齐次微分方程, 故本题答案为 B 项.

A 项: 等式整理得 $y' = e^{2x}e^{-y}$, 显然为可分离变量的微分方程, 故排除.

C 项: 等式整理得 $y' - \frac{\sin x}{x^2 - 1} \cdot y = \frac{\cos x}{x^2 - 1}$, 显然该方程为一阶非齐次线性

微分方程, 故排除.

D 项: 等式整理得 $y' = e^x e^y$, 显然为可分离变量的微分方程, 故排除.

例 10. 求微分方程 $y' = \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}}$ 的通解.

解: 显然该微分方程为齐次微分方程,

令 $u = \frac{y}{x}$, 则 $y = ux$, $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$,

原式化为 $u + x \frac{du}{dx} = u + e^u$, 整理得 $\frac{du}{dx} = \frac{e^u}{x}$,

分离变量得 $e^{-u} du = \frac{1}{x} dx$,

等式两边同时积分得 $\int e^{-u} du = \int \frac{1}{x} dx$, 即 $-e^{-u} = \ln|x| + \ln|C_1|$,

化简得 $e^{-e^{-u}} = Cx$ (其中 $C = \pm C_1$),

回代得通解 $e^{-e^{-\frac{y}{x}}} = Cx$.



注: 当齐次微分方程通解中含有“ $\ln| \quad |$ ”时, 往往常数加“ $\ln|C_1|$ ”, 目的是便于化简, 一般要求通解化简后尽可能不含有绝对值符号, 这一点与可分离变量处理方法相同.

例 11. 求微分方程 $y^2 + x^2 \frac{dy}{dx} = xy \frac{dy}{dx}$ 的通解.

解: 等式整理得 $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy - x^2} = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x} - 1}$, 显然该方程为齐次方程,

令 $u = \frac{y}{x}$, 则 $y = ux$, $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$,

原式化为 $u + x \frac{du}{dx} = \frac{u^2}{u - 1}$, 整理得 $\frac{du}{dx} = \frac{u}{x(u - 1)}$,

分离变量得 $\frac{u - 1}{u} du = \frac{1}{x} dx$,

两边同时积分得 $\int \frac{u - 1}{u} du = \int \frac{1}{x} dx$, 解得 $u - \ln|u| = \ln|x| + \ln|C_1|$,

化简得 $e^u = Cux$ (其中 $C = \pm C_1$),

回代得通解为 $e^{\frac{y}{x}} = Cy$.

例 12. 求齐次微分方程 $y' = \frac{y}{x} + \tan \frac{y}{x}$ 在 $y|_{x=1} = \frac{\pi}{6}$ 下的特解.

解: 显然该微分方程为齐次微分方程,

令 $u = \frac{y}{x}$, 则 $y = ux$, $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$,

原式化为 $u + x \frac{du}{dx} = u + \tan u$, 整理得 $\frac{du}{dx} = \frac{\tan u}{x}$,

分离变量得 $\frac{1}{\tan u} du = \frac{1}{x} dx$,



两边同时积分得 $\int \frac{1}{\tan u} du = \int \frac{1}{x} dx$, 即 $\ln|\sin u| = \ln|x| + \ln|C_1|$,

化简得 $\sin u = Cx$ (其中 $C = \pm C_1$),

回代得通解为 $\sin \frac{y}{x} = Cx$,

又因为 $y|_{x=1} = \frac{\pi}{6}$, 代入通解得 $C = \frac{1}{2}$,

故特解为 $\sin \frac{y}{x} = \frac{1}{2}x$.

四、一阶线性微分方程

1. 定义

形如

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x),$$

的方程, 因为它对于未知函数 y 及其导数是一次方程, 所以称为一阶线性微分方程.

如果 $Q(x) = 0$ 时, 方程为 $y' + P(x)y = 0$, 称为一阶线性齐次微分方程.

如果 $Q(x) \neq 0$ 时, 方程为 $y' + P(x)y = Q(x)$, 称为一阶线性非齐次微分方程.

2. 一阶线性齐次微分方程的求解

对应齐次微分方程 $y' + P(x)y = 0$ 的通解公式为

$$y = Ce^{-\int P(x)dx}.$$

3. 一阶线性非齐次微分方程的求解

对应非齐次微分方程 $y' + P(x)y = Q(x)$ 的通解公式为

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right].$$

例 13. 求微分方程 $y' + y \sin x = 0$ 的通解.

解: 显然该方程为齐次微分方程, 且 $P(x) = \sin x$,

故通解为 $y = Ce^{-\int P(x)dx}$



$$= Ce^{-\int \sin x dx}$$

$$= Ce^{\cos x}$$

则通解为 $y = Ce^{\cos x}$.

例 14. 求微分方程 $(y - 2xy)dx + x^2 dy = 0$ 满足条件 $y|_{x=1} = e$ 的特解.

解: (法一) 等式整理得 $\frac{dy}{dx} = \frac{2x-1}{x^2} y$,

分离变量得 $\frac{1}{y} dy = \frac{2x-1}{x^2} dx$,

等式两端同时积分得 $\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{2x-1}{x^2} dx$, 即 $\ln|y| = 2\ln|x| + \frac{1}{x} + \ln|C_1|$,

化简得 $x^2 e^{\frac{1}{x}} = Cy$ (其中 $C = \pm \frac{1}{C_1}$),

又因为 $y|_{x=1} = e$, 代入通解得 $C = 1$,

所以特解为 $y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$.

(法二) 等式整理得 $\frac{dy}{dx} - \frac{2x-1}{x^2} y = 0$,

显然该方程为一阶齐次线性微分方程, 且 $P(x) = -\frac{2x-1}{x^2}$,

故通解为 $y = Ce^{-\int P(x) dx}$

$$= Ce^{-\int (-\frac{2x-1}{x^2}) dx}$$

$$= Cx^2 e^{\frac{1}{x}}$$

又因为 $y|_{x=1} = e$, 代入通解得 $C = 1$,

所以特解为 $y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$.

注: 一阶齐次线性微分方程一定是一个可分离变量的微分方程, 但可分离变量的微分



方程并不一定是一阶齐次微分方程，所以在解题过程中能用一阶齐次微分方程解决的问题，尽可能选择一阶齐次微分方程解决，直接套用公式使得计算更简便。

例 15. 求微分方程 $y' - 2y - e^{2x} = 0$ 的通解。

解：等式整理得 $y' - 2y = e^{2x}$ ，显然为一阶线性非齐次微分方程，

且 $P(x) = -2$ ， $Q(x) = e^{2x}$ ，

$$\begin{aligned} \text{所以通解为 } y &= e^{-\int P(x)dx} \left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right] \\ &= e^{-\int (-2)dx} \left[\int e^{2x} e^{\int (-2)dx} dx + C \right] \\ &= e^{2x} \left(\int e^{2x} e^{-2x} dx + C \right) \\ &= e^{2x} \left(\int 1 dx + C \right) \\ &= e^{2x} (x + C) \end{aligned}$$

则通解为 $y = e^{2x} (x + C)$ 。

例 16. 求微分方程 $y' + y \cos x = e^{-\sin x}$ 的通解。

解：显然该方程为一阶线性非齐次微分方程，且 $P(x) = \cos x$ ， $Q(x) = e^{-\sin x}$ ，

$$\begin{aligned} \text{所以通解为 } y &= e^{-\int P(x)dx} \left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right] \\ &= e^{-\int \cos x dx} \left(\int e^{-\sin x} e^{\int \cos x dx} dx + C \right) \\ &= e^{-\sin x} \left(\int e^{-\sin x} e^{\sin x} dx + C \right) \\ &= e^{-\sin x} (x + C) \end{aligned}$$

则通解为 $y = e^{-\sin x} (x + C)$ 。

例 17. 求微分方程 $xy' + y = \cos x$ 满足 $y(\pi) = 1$ 的特解。

解：等式整理得 $y' + \frac{1}{x}y = \frac{\cos x}{x}$ ，显然为一阶线性非齐次微分方程，



$$\text{且 } P(x) = \frac{1}{x}, \quad Q(x) = \frac{\cos x}{x},$$

$$\text{所以通解为 } y = e^{-\int P(x)dx} \left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right]$$

$$= e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left(\int \frac{\cos x}{x} e^{\int \frac{1}{x} dx} dx + C \right)$$

$$= \frac{1}{x} \left(\int \frac{\cos x}{x} \cdot x dx + C \right)$$

$$= \frac{1}{x} (\sin x + C)$$

又因为 $y(\pi) = 1$, 代入通解得 $C = \pi$,

$$\text{故特解为 } y = \frac{1}{x} (\sin x + \pi).$$

例 18. 设曲线 $y = f(x)$ 上任一点 (x, y) 处切线的斜率为 $\frac{y}{x} + x^2$, 且该曲线过点

$(1, \frac{1}{2})$, 求函数 $y = f(x)$.

解: 由题可知, 根据导数的几何意义得 $y' = \frac{y}{x} + x^2$,

$$\text{等式整理得 } y' - \frac{1}{x}y = x^2,$$

显然该方程为一阶非齐次线性微分方程, 且 $P(x) = -\frac{1}{x}$, $Q(x) = x^2$,

$$\text{所以通解为 } y = e^{-\int P(x)dx} \left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right]$$

$$= e^{-\int \left(-\frac{1}{x}\right)dx} \left[\int x^2 e^{\int \left(-\frac{1}{x}\right)dx} dx + C \right]$$

$$= x \left(\int x^2 \cdot \frac{1}{x} dx + C \right)$$



$$= x \left(\frac{1}{2} x^2 + C \right)$$

因为曲线过点 $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ ，代入通解得 $C = 0$ ，

$$\text{所以 } y = \frac{1}{2} x^3.$$

例 19. 试确定可导函数 $f(x)$ ，使得 $f(x) = \int_0^{3x} f\left(\frac{t}{3}\right) dt + e^{2x}$ 成立.

解：等式两端同时对 x 求导得 $f'(x) = 3f(x) + 2e^{2x}$ ，

即 $f'(x) - 3f(x) = 2e^{2x}$ ，显然该方程为一阶非齐次线性微分方程，

且 $P(x) = -3$ ， $Q(x) = 2e^{2x}$ ，

$$\text{所以通解为 } f(x) = e^{-\int P(x) dx} \left[\int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx + C \right]$$

$$= e^{-\int (-3) dx} \left[\int 2e^{2x} e^{\int (-3) dx} dx + C \right]$$

$$= e^{3x} \left(\int 2e^{2x} \cdot e^{-3x} dx + C \right)$$

$$= e^{3x} \left(\int 2e^{-x} dx + C \right)$$

$$= e^{3x} (-2e^{-x} + C)$$

当 $x = 0$ 时，代入原式得 $f(0) = 1$ ，也满足通解，故再代入通解得 $C = 3$ ，

所以 $f(x) = e^{3x} (-2e^{-x} + 3)$.



第二节 二阶常系数齐次线性微分方程

1. 理解二阶常系数齐次线性微分方程解的性质及通解的结构.
2. 熟练掌握二阶常系数齐次线性微分方程的解法.

一、二阶常系数齐次线性微分方程

1. 定义

在二阶齐次线性微分方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

中, 如果 y' , y 的系数 $P(x)$, $Q(x)$ 均为常数, 即上式成为

$$y'' + py' + qy = 0$$

的微分方程称为二阶常系数齐次线性微分方程.

2. 二阶常系数齐次线性微分方程通解的步骤

第一步 写出微分方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的特征方程

$$r^2 + pr + q = 0.$$

第二步 求出特征方程的两个根 r_1 , r_2 .

第三步 根据特征方程的两个根的不同情形, 按照下表 5-1 写出微分方程的通解:

表 5-1 微分方程的通解

特征方程 $r^2 + pr + q = 0$ 的两个根 r_1, r_2	微分方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的通解
两个不相等的实根 r_1, r_2	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
两个相等的实根 $r_1 = r_2$	$y = (C_1 + C_2 x) e^{r x}$
一对共轭复根 $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$	$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

例 1. 求微分方程 $y'' + y' - 2y = 0$ 的通解.

解: 特征方程为 $r^2 + r - 2 = 0$,

解得特征根为 $r_1 = 1, r_2 = -2$, 显然有两个不等实根,



故通解为 $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$.

例 2. 求微分方程 $4y'' - 12y' + 9y = 0$ 的通解.

解: 特征方程为 $4r^2 - 12r + 9 = 0$,

解得特征根为 $r_{1,2} = \frac{3}{2}$, 显然有两个相等实根,

故通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^{\frac{3}{2}x}$.

例 3. 求微分方程 $y'' + 6y' + 13y = 0$ 的通解.

解: 特征方程为 $r^2 + 6r + 13 = 0$,

解得特征根为 $r_{1,2} = -3 \pm 2i$, 显然有一对共轭复根,

故通解为 $y = e^{-3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$.

例 4. 微分方程 $y'' - 2y = 0$ 的通解为 ().

A. $y = e^{2x} + C$, ($C \in R$)

B. $y' = C_1 e^{\sqrt{2}x} + C_2 e^{-\sqrt{2}x}$, ($C_1, C_2 \in R$)

C. $y' = (C_1 + C_2 x)e^{\sqrt{2}x}$, ($C_1, C_2 \in R$)

D. $y = e^{-2x} + C$, ($C \in R$)

解: 由题意知, 特征方程为 $r^2 - 2 = 0$,

则特征根为 $r = \pm\sqrt{2}$, 显然有两个不等的实根,

故通解为 $y' = C_1 e^{\sqrt{2}x} + C_2 e^{-\sqrt{2}x}$, ($C_1, C_2 \in R$),

故本题答案为 B 项.

例 5. 已知曲线 $y = f(x)$ 过原点, 且它在原点处的切线与直线 $2x + y + 6 = 0$ 平行, 且 $y = f(x)$ 满足 $y'' - 2y' + y = 0$, 求 $y = f(x)$.

解: 由题可知, 特征方程为 $r^2 - 2r + 1 = 0$,

解得特征根为 $r_{1,2} = 1$, 显然有两个相等实根,

故通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^x$,



又因为曲线过原点 $(0, 0)$ ，代入通解得 $C_1 = 0$ ，

且在原点处的切线与直线 $2x + y + 6 = 0$ 平行，故 $y'|_{x=0} = k_{\text{直}} = -2$ ，

$$y'|_{x=0} = [C_2 e^x + (C_1 + C_2 x) e^x]_{x=0} = C_2 + C_1 = -2,$$

联立解得 $C_1 = 0$ ， $C_2 = -2$ ，

所以 $f(x) = -2xe^x$ 。

例 6. 设函数 $y = y(x)$ 是微分方程 $y'' - 3y' + 2y = 0$ 的解，且在 $x = 0$ 处取得极值 3，求 $y(x)$ 的表达式。

解：特征方程为 $r^2 - 3r + 2 = 0$ ，

解得特征根为 $r_1 = 1$ ， $r_2 = 2$ ，显然有两个不等实根，

故通解为 $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$ ，

又因为在 $x = 0$ 处取得极值 3，所以 $y(0) = 3$ 代入通解得 $C_1 + C_2 = 3$ ，

且 $y' = C_1 e^x + 2C_2 e^{2x}$ ，无一阶不可导点，则 $x = 0$ 为驻点，

故 $y'(0) = 0$ ，代入上式得 $C_1 + 2C_2 = 0$ ，

联立解得 $C_1 = 6$ ， $C_2 = -3$ ，

所以 $y = 6e^x - 3e^{2x}$



第六章 无穷级数

第一节 常数项级数的概念和性质

本节学习目标

1. 理解无穷级数收敛、发散的概念.
2. 理解级数收敛的必要条件和级数的主要性质.
3. 知道几何级数 $\sum_{n=0}^{\infty} aq^{n-1}$, P -级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 的敛散性.

一、无穷级数的相关概念

一般地, 如果给定一个数列

$$u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots,$$

那么由这个数列构成的表达式

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

叫做(常数项)无穷级数, 简称(常数项)级数, 记为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots,$$

其中第 n 项 u_n 叫做级数的一般项.

作(常数项)级数的前 n 项和

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{i=1}^n u_i,$$

S_n 称为级数的部分和. 当 n 依次取 $1, 2, 3, \cdots$ 时, 它们构成一个新的数列

$$S_1 = u_1, \quad S_2 = u_1 + u_2, \quad S_3 = u_1 + u_2 + u_3, \quad \cdots,$$

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n, \quad \cdots.$$

这些级数的部分和构成一个新数列 $\{S_n\}$, 称该数列为级数的部分和数列.



如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列 $\{s_n\}$ 有极限 s ，即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s,$$

那么称无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，极限 s 叫做级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的和，并写成

$$s = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots;$$

如果 $\{s_n\}$ 没有极限，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

例 1. 判定级数 $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \cdots$ 的敛散性.

解: 显然级数的一般项为 $u_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$,

则级数的前 n 项和

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2 \times 1 - 1} - \frac{1}{2 \times 1 + 1} + \frac{1}{2 \times 2 - 1} - \frac{1}{2 \times 2 + 1} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right). \end{aligned}$$

因为 $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2}$ ，所以该级数收敛.

例 2. 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$ 的敛散性.

解: 显然级数的一般项为 $u_n = \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \ln \frac{n+1}{n}$,

则级数的前 n 项和

$$s_n = \ln \frac{2}{1} + \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{4}{3} + \cdots + \ln \frac{n+1}{n}$$



$$= \ln \frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \cdots \times \frac{n+1}{n}$$

$$= \ln(n+1).$$

因为 $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n+1) = +\infty$, 所以该级数发散.

例 3. 判定级数 $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) + \cdots$ 的敛散性.

解: 级数可记为 $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{3^n} + \cdots$

则级数的前 n 项和

$$s_n = \frac{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right)}{1 - \frac{1}{3}} = 1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right).$$

因为 $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right)\right] = \frac{3}{2}$, 以该级数收敛.

二、几种特殊级数的敛散性

1. 等比级数 (几何级数)

无穷级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots$$

叫做**等比级数** (又称为**几何级数**), 其中 $a \neq 0$, q 叫做级数的公比.

等比级数敛散性判定的结论: ①当 $|q| < 1$ 时, 级数收敛;

②当 $|q| \geq 1$ 时, 级数发散.

2. P -级数

无穷级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

叫做 **P -级数**, 其中 p 为常数.



P -级数敛散性判定的结论: ① $P > 1$ 时, 级数收敛;

② $P \leq 1$ 时, 级数发散.

特别地, 当 $P = 1$ 时, 称 P -级数为调和级数, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散.

例 4. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{a+1}}$ 发散, 则 a 的范围是_____.

解: 显然 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{a+1}}$ 为 P 级数, 因为该级数发散,

所以 $a+1 \leq 1$, 解得 $a \leq 0$.

例 5. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n}$ 的敛散性.

解: 原级数可化为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$,

显然为等比级数, 且 $|q| = \frac{2}{3} < 1$,

故该级数收敛.

例 6. 下列级数中发散的是 ().

A. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n$

B. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

C. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

D. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

解: C 项: 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$, 显然为 P 级数, 且 $P = \frac{1}{2} < 1$,

所以原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散, 故本题答案为 C 项.

A 项: 显然 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n$ 为等比级数, 且 $|q| = \frac{1}{4} < 1$,

所以原级数收敛, 故排除.



B 项：显然 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ，显然为 P -级数，且 $P=2>1$ ，

所以原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ 收敛，故排除。

D 项：在下一节会介绍正项级数的敛散性判定方法。

三、无穷级数的基本性质

性质 1 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛， k 为常数，则 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 也收敛。

推论：级数的每一项同乘一个不为零的常数后，其敛散性不改变。

性质 2 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 均收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 也收敛，且

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n.$$

推论：(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 一个收敛，一个发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 一定发散。

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 可能收敛，也可能发散。

性质 3 在级数中去掉、加上或改变有限项，不会改变级数的敛散性。

性质 4 收敛级数加括号后所得到的新级数仍收敛于原级数的和。

性质 5 (级数收敛的必要条件) 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ 。

注：性质 5 说明，若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则必有 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ ；但 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ ，并不能说明

级数收敛（如 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ ，但 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散）。

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ 是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的必要非充分条件。



相反的, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 一定发散, 这也是用来判断级数发散的方法.

例 7. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n - v_n)$ ().

A. 一定发散

B. 一定收敛

C. 可能收敛

D. 以上三种说法都不对

解: 由级数性质知, 收敛级数和发散的级数通项相加减构成的级数敛散性不确定,

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n - v_n)$ 可能收敛, 可能发散, 故本题答案为 C 项.

例 8. 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + 0.001)$ _____. (填“收敛”或“发散”)

解: (法一) 因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 所以由级数收敛的必要条件可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$,

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n + 0.001) = 0.001 \neq 0$, 故由级数收敛的必要条件的逆否命题

可知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + 0.001)$ 发散.

(法二) 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} 0.001 = \sum_{n=1}^{\infty} 0.001 \cdot 1^n$, 可看作公比为 $|q|=1$

的等比级数, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} 0.001$ 发散, 所以由级数性质可知,

收敛级数的通项加发散级数的通项构成的新级数一定发散.

例 9. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{n^2} \right)$ 的敛散性.

解: 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n$ 为等比级数, 且 $|q| = \frac{1}{2} < 1$, 所以该级数收敛,



又因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 为 P -级数, 且 $P=2>1$, 故该级数收敛,

由级数性质可知, 原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{n^2} \right)$ 收敛.

例 10. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n}{n}$ 的敛散性.

解: 因为 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2+n}{n} = +\infty \neq 0$, 故原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n}{n}$ 发散.

例 11. 已知 $\{a_n\}$ 收敛于 a , 证明: $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$ 收敛, 且前 n 项和为 $a_1 - a$.

证明: 因为 $\{a_n\}$ 收敛于 a , 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = a$, 设 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$ 前 n 项和

为 s_n , 故 $s_n = a_1 - a_2 + a_2 - a_3 + \cdots + a_n - a_{n+1} = a_1 - a_{n+1}$,

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 - a_{n+1}) = a_1 - a$, 故由定义知 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$ 收敛,

且前 n 项和为 $a_1 - a$.



第二节 常数项级数的审敛法

本节学习目标

1. 熟练掌握正项级数的比较判别法、比值判别法与根值判别法.

一、正项级数及其审敛法

1. 正项级数

如果常数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的各项都是正数或零, 即 $u_n \geq 0, (n=1, 2, 3, \dots)$, 则称

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数.

2. 比值审敛法

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数, 如果

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho,$$

那么

(1) 当 $\rho < 1$ 时, 级数收敛;

(2) 当 $\rho > 1$ (或 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \infty$) 时, 级数发散;

(3) 当 $\rho = 1$ 时, 级数可能收敛也可能发散.

例 1. 下列级数收敛的是 ().

A. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{3^n}$

B. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

C. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

D. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

解: C 项: 显然 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ 为正项级数, 且 $\rho = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \frac{1}{2} < 1,$



所以由正项级数的比值判别法可知, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ 收敛,

故本题答案为 C.

A 项: 显然 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{3^n}$ 为等比级数, 且 $|q| = \frac{4}{3} > 1$, 则该级数发散, 故排除.

B 项: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ 显然为 P 级数, 且 $P = \frac{1}{2} < 1$, 则该级数发散, 故排除.

D 项: 显然 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ 为正项级数,

$$\begin{aligned} \text{且 } \rho &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e > 1, \end{aligned}$$

则由正项级数的比值判别法可知, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ 发散, 故排除.

例 2. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2025^n}{n!}$ 的敛散性.

解: 设 $u_n = \frac{2025^n}{n!}$, 显然 $\frac{2025^n}{n!} > 0$, 所以该级数为正项级数,

又因为

$$\rho = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2025^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2025^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2025}{n+1} = 0 < 1,$$

所以由正项级数的比值判别法可知, 该级数收敛.



例 3. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$ 的敛散性.

解: 设 $u_n = \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$, 显然 $\frac{2^n \cdot n!}{n^n} > 0$, 所以该级数为正项级数,

$$\begin{aligned} \text{又因为 } \rho &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2^{n+1} \cdot (n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{2^n \cdot n!}{n^n}} \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{-1}{n+1} \right)^{-(n+1) \cdot \frac{1}{-(n+1)} \cdot n} \\ &= 2e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-n}{n+1}} \\ &= \frac{2}{e} < 1. \end{aligned}$$

所以由正项级数的比值判别法可知, 该级数收敛.

3. 比较审敛法

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数, 且 $u_n \leq v_n$ ($n=1, 2, 3, \dots$), 则

- (1) $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛. (简记“大收则小收”)
- (2) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散. (简记“小发则大发”)

例 4. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+4)}$ 的敛散性.

解: 显然级数通项为 $\frac{1}{(n+1)(n+4)} \leq \frac{1}{n^2}$,



且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+4)}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 均为正项级数,

因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 为 P 级数, 且 $P=2 \geq 1$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛,

由比较判别法可知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+4)}$ 也收敛.

例 5. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin n}{n^2} \right|$ 的敛散性.

解: 显然级数通项为 $\left| \frac{\sin n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$,

且 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin n}{n^2} \right|$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 均为正项级数,

因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 为 P 级数, 且 $P=2 \geq 1$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛,

由比较判别法可知 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin n}{n^2} \right|$ 也收敛.

4. 比较审敛法的极限形式

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l$.

(1) 如果 $0 < l < +\infty$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 同敛散性;

(2) 如果 $l = 0$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;

(3) 如果 $l = +\infty$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

例 6. 下列级数发散的是 ().

A. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$

B. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2 \frac{1}{n}$



$$\text{C. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$$

$$\text{D. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n+4)(5n-1)}$$

解: C 项: 由级数收敛必要条件的逆否命题可知,

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ 发散,

故本题答案为 C 项.

A 项: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ 显然为等比级数, 且 $|q| = \frac{1}{3} < 1$, 故收敛.

B 项: 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\sin^2 \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n^2}$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = 1$,

又 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 也为正项级数, 所以由正项级数的比较判别法可知,

$\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2 \frac{1}{n}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 同敛散性, 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2 \frac{1}{n}$ 也收敛;

D 项: 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{(5n+4)(5n-1)}$ 的同阶无穷小为 $\frac{1}{n^2}$,

且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(5n+4)(5n-1)}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{25}$, 又 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n+4)(5n-1)}$ 也为正项级数,

所以由正项级数的比较判别法可知, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n+4)(5n-1)}$ 与

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 同敛散性, 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n+4)(5n-1)}$ 也收敛.

例 7. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(e^{\frac{1}{n^2}} - 1)$ 的敛散性.

解: 显然 $\sum_{n=1}^{\infty} n(e^{\frac{1}{n^2}} - 1)$ 为正项级数, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 也为正项级数,



因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(e^{\frac{1}{n^2}} - 1)}{\frac{1}{n}} = 1$, 所以正项级数的比较判别法可知,

$\sum_{n=1}^{\infty} n(e^{\frac{1}{n^2}} - 1)$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 同敛散性, 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} n(e^{\frac{1}{n^2}} - 1)$ 也发散.

例 8. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^3}$ 的敛散性.

解: 显然 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^3}$ 为正项级数, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 也为正项级数,

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1+n}{1+n^3}}{\frac{1}{n^2}} = 1$, 所以正项级数的比较判别法可知,

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^3}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 同敛散性, 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^3}$ 也收敛.

5. 根值审敛法

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数, 如果

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho,$$

那么

- (1) 当 $\rho < 1$ 时, 级数收敛;
- (2) 当 $\rho > 1$ (或 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = +\infty$) 时, 级数发散;
- (3) 当 $\rho = 1$ 时, 级数可能收敛也可能发散.

例 9. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n-1} \right)^n$ 的敛散性.

解: 显然 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n-1} \right)^n$ 为正项级数,



$$\text{且 } \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{3n-1}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3n-1} = \frac{2}{3} < 1,$$

由正项级数的根值判别法可知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n-1}\right)^n$ 收敛.

二、交错级数及其审敛法

1. 交错级数

如果级数可以写成

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots,$$

或

$$-u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \cdots,$$

的形式, 即它的各项是正负交替出现, 且 $u_1, u_2, \dots$ 都是正数, 把这样的级数称为交错级数.

2. 交错级数的审敛法 (莱布尼茨审敛法)

如果交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ ($u_n > 0$) 满足条件:

$$(1) u_n \geq u_{n+1} (n=1, 2, \cdots);$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0;$$

则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 收敛.

例 10. 下列级数发散的是 ().

$$\text{A. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$$\text{B. } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$$

$$\text{C. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\text{D. } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$$

解: A 项: 显然 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 为调和级数, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 故本题答案为 A.



B 项: 显然 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ 为交错级数, 令 $u_n = \frac{1}{n}$,

显然 $u_n > u_{n+1}$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, 故该级数收敛.

C 项: 显然 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 为 P 级数, 且 $P=2>1$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛.

D 项: 显然 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$ 为交错级数, 令 $u_n = \frac{1}{n^2}$,

显然 $u_n > u_{n+1}$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$, 故该级数收敛.

例 11. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln(1+n)}$ 的敛散性.

解: 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln(1+n)}$ 为交错级数, 设 $u_n = \frac{1}{\ln(1+n)} > 0$,

且满足 $u_n > u_{n+1}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(1+n)} = 0$,

由莱布尼茨判别法可知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln(1+n)}$ 收敛.

三、条件收敛和绝对收敛

如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 各项取绝对值后得到的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = |u_1| + |u_2| + \cdots + |u_n| + \cdots$$

收敛, 那么称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛; 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散, 那么

称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛.



例如：级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2}$ 绝对收敛，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ 是条件收敛。

级数绝对收敛与级数收敛有以下重要关系：

如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛，那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 必定收敛。

例 12. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\sin n}{n^2}$ 的敛散性，如果收敛，是绝对收敛还是条件收敛。

解： $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1+\sin n}{n^2} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$ ，显然 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\sin n}{n^2}$ 也收敛，

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\sin n}{n^2}$ 绝对收敛。

例 13. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ 的敛散性。

解：显然该级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ 为交错级数，且 $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} > 0$ ，

因为 $u_n > u_{n+1}$ ，且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ ，

所以由莱布尼茨判别法可知，该交错级数收敛，

又因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ ，

显然为 P 级数，且 $P = \frac{1}{2} < 1$ ，故发散，

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ 条件收敛。



第三节 幂级数

本节学习目标

1. 理解幂级数的收敛半径、收敛区间及收敛域的定义.
2. 熟练掌握求幂级数的收敛半径、收敛区间及收敛域的方法.

一、函数项级数的概念

如果给定一个定义在区间 I 上的函数列

$$u_1(x), u_2(x), u_3(x), \dots, u_n(x), \dots,$$

那么由这函数列构成的表达式

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

称为定义在区间 I 上的**函数项级数**.

如果 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 收敛, 就称 x_0 是函数项级数的**收敛点**; 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 发散, 就称

x_0 是函数项级数的**发散点**; 函数项级数的所有收敛点称为**收敛域**, 所有的发散点称为**发散域**.

二、幂级数及其收敛性

1. 幂级数

形如 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 的函数项级数称为 $(x-x_0)$ 的**幂级数**, 特别地, 当 $x_0=0$ 时,

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 称为 x 的幂级数.

上式中, 将幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 中的 $x-x_0$ 换为 t , 就将其化为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ 形式了,

下面我们重点研究如 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的幂级数.

2. 阿贝尔定理



如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = x_0 (x_0 \neq 0)$ 处收敛, 则当 $|x| < |x_0|$ 时 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛;

如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = x_0$ 处发散, 则当 $|x| > |x_0|$ 时 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 发散.

3. 收敛半径、收敛区间及收敛域的求解步骤:

第一步 先求收敛半径, 对于幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 记 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho$,

称 $R = \frac{1}{\rho}$ 为幂级数的收敛半径;

第二步 确定收敛区间, 以原点为圆心, R 为半径的开区间 $(-R, R)$ 称为幂级数的收敛区间;

第三步 确定收敛域, 分别验证收敛区间的端点值 $x = \pm R$ 处的敛散性, 由区间端点敛散性加上收敛区间得到收敛域.

注: (1) 若 $R = 0$, 则幂级数收敛于 $x = 0$ 这个点;

(2) 若 $R = +\infty$, 则幂级数的收敛域为 $(-\infty, +\infty)$;

(3) 若 $0 < R < +\infty$, 则幂级数的收敛域为开区间 $(-R, R)$, 再判断端点敛散性, 并确定收敛域的开闭.

(4) 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ 的收敛域是以点 x_0 为中心, R 为半径 (即

$x_0 - R < x < x_0 + R$) 的圆域, 再加上对两 endpoints 敛散性决定收敛区间端点的开闭.

例 1. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 3^n}$ 的收敛域.

解: 由题可知, 因为 $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n \cdot 3^n}{(n+1) \cdot 3^{n+1}} \right| = \frac{1}{3}$,

所以收敛半径为 $R = \frac{1}{\rho} = 3$, 收敛区间为 $(-3, 3)$,



当 $x = -3$ 时, 原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n \cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 为交错级数, 故该级数收敛,

当 $x = 3$ 时, 原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n \cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 为调和级数, 故该级数发散,

所以收敛域为 $[-3, 3)$.

例 2. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 的收敛域.

解: 由题可知, 因为 $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n!}{(n+1)!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n+1} \right| = 0$,

所以收敛半径为 $R = \frac{1}{\rho} = \infty$,

收敛区间为 $(-\infty, +\infty)$, 所以收敛域为 $(-\infty, +\infty)$.

例 3. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$ 的收敛半径.

解: 由题可知, 因为 $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)!}{n!} \right| = \infty$,

所以收敛半径为 $R = \frac{1}{\rho} = 0$, 故级数 $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$ 收敛于 $x = 0$ 点.

例 4. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{\sqrt{n}}$ 的收敛域.

解: 由题可知, 因为 $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \right| = 1$,

所以收敛半径为 $R = \frac{1}{\rho} = 1$, 即当 $-1 < x-5 < 1$ 时收敛,

得收敛区间为 $(4, 6)$,

当 $x = 4$ 时, 原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4-5)^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 为交错级数, 故该级数收敛,



当 $x=6$ 时, 原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ 为 P 级数, 且 $P = \frac{1}{2} < 1$,

故该级数发散, 所以收敛域为 $[4, 6)$.

三、缺项型幂级数收敛性

缺项型幂级数是指 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 中, x 的某些次方不存在 (x 的方次不连续), 此时只能用级数收敛性的比值判别法求收敛域, 即

- (1) 求出 $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right|$ (ρ 是一个关于 x 的函数);
- (2) 令 $\rho < 1$, 解不等式得出 x 的解集, 这是收敛区间;
- (3) 令 $\rho = 1$, 得到 x 的端点值, 代入级数验证是否收敛;
- (4) 将 (2) 得到的结果再加上 (3) 的收敛点, 就是收敛域.

例 5. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2}$ 的收敛半径.

解: 由题可知, 因为 $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u(x+1)}{u(x)} \right|$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{[2(n+1)-1]x^{2n}}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{(2n-1)x^{2n-2}} \right| \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2n+1}{2(2n-1)} x^2 \right| = \frac{1}{2} x^2
 \end{aligned}$$

令 $\rho < 1$, 解得收敛区间为 $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, 所以收敛半径 $R = \sqrt{2}$.



第七章 线性代数

第一节 行列式

本节学习目标

1. 理解行列式的概念，掌握行列式的性质.
2. 掌握行列式的计算.
3. 会用克莱姆（Cramer）法则求解线性方程组.

一、行列式的概念

1. 二阶行列式

形如四个元素按照两行两列的顺序排列成数表

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

则表达式 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 称为该数表所确定的二阶行列式，记作

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

数 a_{ij} ($i=1, 2; j=1, 2$) 称为行列式的元素，元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为行标，表明该元素位于第 i 行；第二个下标 j 称为列标，表明该元素位于第 j 列.

二阶行列式的值是一个数值或一个代数式，其计算方法可以用对角线法则来计算，把 a_{11} 到 a_{22} 的连线称为主对角线， a_{12} 到 a_{21} 的连线称为副对角线；于是二阶行列式的值便是主对角上两元素之积减去副对角线上两元素之积所得的差.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

例 1. 计算 $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$.

解：原式 $= 1 \times (-3) - (-1) \times 2 = -1$.

2. 三阶行列式



设有 9 个数排成 3 行 3 列的数表

$$\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array},$$

记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33},$$

称为数表所确定的三阶行列式.

例 2. 计算 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

解: 原式 $= 1 \times (-5) \times 1 + 3 \times 3 \times 1 + (-1) \times 0 \times 0$
 $- 1 \times (-5) \times (-1) - 0 \times 3 \times 1 - 1 \times 0 \times 3$
 $= -1.$

注: (1) 行列式本质上是一个数或者代数式 (如表达式中有字母);

(2) 对角线法则只适用于二阶及三阶行列式, 四阶及以上不再适用.

3. n 阶行列式

按照二阶和三阶行列式概念, 仿此, 可把行列式推广, 设有 n^2 个数, 排成 n 行 n 列, 记作

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

其中 a_{ij} 称为行列式 D 的第 i 行第 j 列的元素.

特别地, 当 $n=1$ 时, 一阶行列式 $|a| = a$, 注意不要与绝对值记号相混淆.



4. 上三角行列式

主对角线以下的元素都为 0 的行列式叫做**上三角行列式**，记为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}.$$

主对角线以上的元素都为 0 的行列式叫做**下三角行列式**，记为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}.$$

主对角线以上和以下的元素都为 0 的行列式叫做**对角行列式**，记为

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_n.$$

例如 $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & -8 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times (-5) \times (-8) \times 2 = 80.$

5. 转置行列式

将行列式 D 的行与列对换得到的行列式，称为 D 的**转置行列式**，记作 D^T 。

例如 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ ，则 $D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$

二、行列式的性质

性质 1 行列式与它的转置行列式的值是相等的，即 $D = D^T$ 。



例如: $D = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}$, 则 $D^T = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}$, 且 $D = D^T = -14$.

性质 2 对换行列式的两行(列), 行列式变号.

注: 互换行列式的第 i 行(列)与第 j 行(列), 记为 $r_i \leftrightarrow r_j$ ($c_i \leftrightarrow c_j$).

例如 $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5$; 或 $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_2} -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 5$.

推论 如果行列式的两行(列)元素完全相同, 则行列式的值等于零.

例 3. 设 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3$, 则 $\begin{vmatrix} x & a & 1 \\ y & b & 2 \\ z & c & 3 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$; $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$.

解: 因为行列式 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3$, 对应其转置行列式为 $\begin{vmatrix} a & x & 1 \\ b & y & 2 \\ c & z & 3 \end{vmatrix} = 3$,

$$\begin{vmatrix} a & x & 1 \\ b & y & 2 \\ c & z & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_2} -\begin{vmatrix} x & a & 1 \\ y & b & 2 \\ z & c & 3 \end{vmatrix}, \text{ 所以 } \begin{vmatrix} x & a & 1 \\ y & b & 2 \\ z & c & 3 \end{vmatrix} = -3.$$

$$\text{同理 } \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3, \text{ 所以 } \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} -\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix},$$

$$\text{得 } \begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -3, \begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} -\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{vmatrix},$$

$$\text{所以 } \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 3.$$

性质 3 行列式的某一行(列)中所有元素都有公因子, 则可把公因子提到行列式符号的外面, 行列式的值不变.



$$\text{例如: } D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ kb_1 & kb_2 & kb_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

推论 1 数乘行列式等于这个数乘行列式的某一行（列）.

推论 2 行列式某一行（列）元素全为零，则行列式的值等于零.

性质 4 行列式中若有两行（列）元素对应成比例，则行列式的值等于零.

性质 5 行列式中某一行（列）的元素都是两数之和，则该行列式可拆分成两个行列式的和.

$$\text{例如: } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + a & b_2 + b & c_2 + c \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a & b & c \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

性质 6 若行列式中某一行（列）各元素都乘同一常数 k 然后加到另一行（列）对应元素上去，行列式的值不变.

注: 以数 k 乘第 j 行（列）加到第 i 行（列）上，记作 $r_i + kr_j (c_i + kc_j)$ ，注意，改变的是第 i 行（列）元素，第 j 行（列）元素不变.

$$\text{例如: } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2 + kr_1} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ ka_1 + a_2 & kb_1 + b_2 & kc_1 + c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

$$\text{例 4. 已知 } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = 2, \begin{vmatrix} a_{31} & a_{11} \\ a_{32} & a_{12} \end{vmatrix} = 3, \text{ 求 } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} + a_{31} \\ a_{12} & a_{22} + a_{32} \end{vmatrix}.$$

$$\text{解: 由题可知, } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} + a_{31} \\ a_{12} & a_{22} + a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{31} \\ a_{12} & a_{32} \end{vmatrix} = 2 + (-3) = -1.$$

行列式的计算方法总结:

(1) 反复利用行列式的性质将某行（列）的元素尽可能多地变成零，再按某行（列）展开，即**降阶**.

(2) 反复使用行列式的性质，将行列式化为上三角行列从而算出行列式的值.

这里重点介绍上三角行列式的方法，降阶的方法在行列式展开定理中重点介绍.



例 5. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

解: 原式 $\xrightarrow{r_3-r_2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$$=1 \times 2 \times 1 = 2.$$

例 6. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & 4 & -1 \end{vmatrix}$.

解: 原式 $\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 7 & 5 \\ -1 & 4 & -1 \end{vmatrix}$

$$\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 7 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-7r_2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= -1 \times 1 \times 9 = -9.$$

例 7. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 297 & 101 & 99 \\ -3 & -3 & 2 \end{vmatrix}$.

解: 原式 $= \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 300 & 100 & 100 \\ -3 & -3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 2 \end{vmatrix}$



$$= \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} r_2+r_1 \\ r_3+r_1 \end{matrix} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} r_3+r_2 \end{matrix} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 18.$$

例 8. 计算行列式 $\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix}.$

解: 原式 $= adf \begin{vmatrix} -b & c & e \\ b & -c & e \\ b & c & -e \end{vmatrix}$

$$= adfbce \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} r_2+r_1 \\ r_3+r_1 \end{matrix} abcdef \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} r_2 \leftrightarrow r_3 \end{matrix} -abcdef \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 4abcdef.$$



例 9. 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \end{vmatrix}.$$

解: 原式

$$\begin{vmatrix} 10 & 10 & 10 & 10 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 10 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 80.$$

注: 满足特征: 各行(列)中元素之和为同一常数的行列式.

计算方法: 将各行(列)的元素全加到第一行(列), 提出公因子再化上三角行列式即可.

三、行列式按行(列)展开

1. 余子式与代数余子式

在 n 阶行列式 D 中, 把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后, 留下的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式, 记作 M_{ij} ; 记

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

A_{ij} 叫做元素 a_{ij} 的代数余子式.

例如三阶行列式



$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

中，元素 a_{13} 的余子式和代数余子式分别为

$$M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \text{ 和 } A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

例 10. 已知行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -8 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix}$ ，求 A_{23} 的值 ().

A. 6 B. -6 C. 8 D. -8

解: $A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 6$ ，故本题答案为 A 项.

2. 拉普拉斯定理

定理 行列式等于它的任一行（列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

或

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

注: (1) 在利用拉普拉斯计算行列式时，可以起到降阶的作用，为了便于计算，往往在计算时选择零元素较多的行或列展开.

(2) 前面介绍的对角线法则只适用于二阶和三阶行列式，而拉普拉斯定理适用于所有阶的行列式.

例 11. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.



解: 原式 $\xrightarrow{r_3-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

$\xrightarrow{\text{按第二列展开}} 3 \times (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$

$= -3 \times [(-2) \times 2 - 1 \times 2]$

$= 18.$

例 12. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$

解: 原式 $\xrightarrow{\substack{r_1-2r_4 \\ r_3-2r_4}} \begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 & -10 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 3 & 0 & -14 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$

$\xrightarrow{\text{按第三列展开}} 1 \times (-1)^{4+3} \times \begin{vmatrix} 4 & -1 & -10 \\ 1 & 2 & 2 \\ 10 & 3 & -14 \end{vmatrix}$

$\xrightarrow{\substack{r_2+2r_1 \\ r_3+3r_1}} -1 \times \begin{vmatrix} 4 & -1 & -10 \\ 9 & 0 & -18 \\ 22 & 0 & -44 \end{vmatrix}$

$= 0.$

四、克莱姆法则

含有 n 个未知数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的 n 个线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1)$$



若 $b_i (i=1, 2, \dots, n)$ 不全为零, 线性方程组 (1) 叫做非齐次线性方程组;

当 $b_i (i=1, 2, \dots, n)$ 全为零, 线性方程组 (1) 叫做齐次线性方程组.

克莱姆法则 如果线性方程组 (方程个数等于未知数个数) 的系数行列式不等于零, 即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

那么方程组有惟一解, 其解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \dots, x_n = \frac{D_n}{D},$$

其中 $D_j (j=1, 2, \dots, n)$ 是把系数行列式 D 中的第 j 列元素用方程组右端的常数列代替后所得到的 n 阶行列式.

注: (1) 只有当方程组中方程的个数和未知数的个数相等时才可以用克莱姆法则;

(2) 齐次线性方程组只有零解 $\Leftrightarrow$ 当且仅当 $D \neq 0$;

(3) 齐次线性方程组有非零解 (或无穷多解) $\Leftrightarrow$ 当且仅当 $D = 0$.

例 13. 当 $a \neq$ () 时, 线性方程组若方程 $\begin{cases} ax + z = 0 \\ 2x + ay + z = 0 \\ ax - 2y + z = 0 \end{cases}$ 只有零解.

A. -2

B. -1

C. 0

D. 2

解: 因为该方程为齐次线性方程组, 且方程个数等于未知数个数,

要使该方程只有零解, 则 $D \neq 0$, 即

$$D = \begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ a & -2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - r_1} \begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 2-a & a & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{按第三列展开}} 1 \times (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} 2-a & a \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2(a-2).$$

即 $2(a-2) \neq 0$, 所以 $a \neq 2$, 故本题答案为 D 项.



例 14. 当 λ 为何值时, 线性方程组
$$\begin{cases} (\lambda-3)x_1 - x_2 = 0 \\ 4x_1 + (\lambda+1)x_2 = 0 \\ -4x_1 + 8x_2 + (\lambda+2)x_3 = 0 \end{cases}$$
 有非零解.

解: 因为该方程为齐次线性方程组, 且方程个数等于未知数个数,

要使该方程有非零解, 则 $D=0$, 即

$$D = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 & 0 \\ 4 & \lambda+1 & 0 \\ -4 & 8 & \lambda+2 \end{vmatrix}$$

按第三列展开 $(\lambda+2) \times (-1)^{3+3} \times \begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 \\ 4 & \lambda+1 \end{vmatrix}$

$$= (\lambda+2)(\lambda-1)^2,$$

即 $(\lambda+2)(\lambda-1)^2 = 0$, 所以 $\lambda = -2$ 或 $\lambda = 1$.



第二节 矩阵

本节学习目标

1. 熟练掌握矩阵的线性运算及运算法则、矩阵的乘法及运算法则.
2. 理解方阵可逆的概念和判定法则, 掌握求可逆矩阵的逆矩阵的方法.
3. 理解矩阵的秩的概念, 掌握求矩阵秩的方法.
4. 会解简单的矩阵方程.
5. 熟练掌握矩阵的初等变换.

一、矩阵的定义

由 $m \times n$ 个元素排成的 m 行 n 列的数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

称为 $m \times n$ 矩阵, 简记为 $A = (a_{ij})_{m \times n}$. 数 a_{ij} 位于矩阵 A 的第 i 行, 第 j 列.

几种常见的特殊矩阵

1. 方阵: 当 $m = n$ 时, 称为 n 阶方阵, 记为 A_n .

如 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -9 \end{pmatrix}$ 为三阶方阵.

2. 零矩阵: 当 A 中元素全为 0 时, 则称 A 为零矩阵, 一般记为 O . 注意不同型的零矩阵是不同的.

3. 单位矩阵: 主对角线上元素均为 1, 其余元素全是 0 的矩阵称为单位矩阵, 一般记为 E .

如 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 为三阶单位矩阵.

4. 行矩阵: 矩阵中只有一行, 如 $(1 \ 1 \ 3)$.



5.列矩阵: 矩阵中只有一列, 如 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$.

6.同型矩阵: 两矩阵的行数与列数完全相同的矩阵.

7.转置矩阵: 设 $A=(a_{ij})_{m \times n}$, 将矩阵 A 的行与列互换得到的矩阵称为转置矩阵, 记为 A^T .

二、矩阵的运算

1. 矩阵的加减法

设有两个同型矩阵 $A=(a_{ij})_{m \times n}$, $B=(b_{ij})_{m \times n}$, 则矩阵 A 与 B 的和 (差) 记作 $A \pm B$, 规定

$$A \pm B = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \cdots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \cdots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \cdots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix}.$$

应该注意, 只有当两个矩阵是同型矩阵时, 这两个矩阵才能进行加法运算.

矩阵加法满足下列运算规律 (设 A, B, C 都是 $m \times n$ 矩阵):

- (1) $A+B=B+A$;
- (2) $(A+B)+C=A+(B+C)$;
- (3) $A+(-A)=O$;
- (4) $A-B=A+(-B)$.

例 1. 已知 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, 计算 $A+B$ 及 $A-B$.

解: 由题可知, $A+B=\begin{pmatrix} 1+0 & -1+1 & 2+0 \\ 0-3 & 1+2 & -2+4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

$$A-B=\begin{pmatrix} 1-0 & -1-1 & 2-0 \\ 0-(-3) & 1-2 & -2-4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & -6 \end{pmatrix}.$$



2. 数与矩阵的乘法

数 k 与矩阵 A 的乘积记作 kA 或 Ak , 规定为

$$kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}.$$

数乘矩阵满足下列运算规律 (设 A, B 为 $m \times n$ 矩阵, λ, μ 为数):

$$(1) (\lambda\mu)A = \lambda(\mu)A;$$

$$(2) (\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A;$$

$$(3) \lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B.$$

例 2. 已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, 计算 $2A - B$.

解: 因为 $2A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$, 所以 $2A - B = \begin{pmatrix} 2-3 & -2-2 \\ 4-(-1) & 8-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}.$

3. 矩阵的乘法

设 $A = (a_{ij})$ 是一个 $m \times s$ 矩阵, $B = (b_{ij})$ 是一个 $s \times n$ 矩阵, 那么规定矩阵 A 与矩阵 B 的乘积是一个 $m \times n$ 的矩阵 $C = AB = (c_{ij})_{m \times n}$, 其中

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}.$$

注: 矩阵相乘的条件: 左乘矩阵的列数等于右乘矩阵的行数, $A_{m \times s} B_{s \times n} = C_{m \times n}$, 即矩阵相乘, 积矩阵的行数等于左乘矩阵的行数, 积矩阵的列数等于右乘矩阵的列数;

例 3. 已知 $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, 求 AB , AC .

解: 由题可知, $AB = \begin{pmatrix} 2 \times (-1) + 4 \times 2 & 2 \times 4 + 4 \times (-1) \\ (-3) \times (-1) + (-6) \times 2 & (-3) \times 4 + (-6) \times (-1) \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -9 & -6 \end{pmatrix}.$$



$$\begin{aligned}
 AC &= \begin{pmatrix} 2 \times 1 + 4 \times 1 & 2 \times 0 + 4 \times 1 \\ (-3) \times 1 + (-6) \times 1 & (-3) \times 0 + (-6) \times 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -9 & -6 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

例 4. 已知 $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$, 求 AB , BA .

解: 由题可知, $AB = \begin{pmatrix} (-2) \times 2 + 4 \times (-3) & (-2) \times 4 + 4 \times (-6) \\ 1 \times 2 + (-2) \times (-3) & 1 \times 4 + (-2) \times (-6) \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -16 & -32 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
 BA &= \begin{pmatrix} 2 \times (-2) + 4 \times 1 & 2 \times 4 + 4 \times (-2) \\ (-3) \times (-2) + (-6) \times 1 & (-3) \times 4 + (-6) \times (-2) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

例 5. 已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$ 求 AB .

解: 由题可知, $AB = \begin{pmatrix} 1 \times 4 + (-2) \times 6 & 1 \times 5 + (-2) \times 7 \\ 0 \times 4 + 3 \times 6 & 0 \times 5 + 3 \times 7 \\ (-1) \times 4 + 2 \times 6 & (-1) \times 5 + 2 \times 7 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -8 & -9 \\ 18 & 21 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

由例 3、例 4 两个例子容易得出矩阵乘法运算律的几个重要结论:

- (1) 矩阵乘法不满足交换律, 即在一般情况下 $AB \neq BA$;
- (2) 矩阵乘法不满足消去律, 即 $AB = AC$, $A \neq O$ 不能推出 $B = C$;
- (3) 若 $AB = O$, 并不能说明 $A = O$ 或 $B = O$.
- (4) 矩阵的乘法虽不满足交换律, 但仍满足下列结合律和分配律 (假设运算都是可行



的):

$$\textcircled{1} (AB)C = A(BC);$$

$$\textcircled{2} \lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B) \quad (\text{其中 } \lambda \text{ 为数});$$

$$\textcircled{3} A(B+C) = AB+AC, \quad (B+C)A = BA+CA;$$

$$\textcircled{4} EA = AE = A.$$

三、矩阵的转置

把矩阵 A 的行换成同序数的列得到一个新矩阵, 叫做 A 的转置矩阵, 记作 A^T , 即

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

例如矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

的转置矩阵为

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

矩阵的转置也是一种运算, 满足下述运算规律 (假设运算都是可行的):

$$(1) (A^T)^T = A;$$

$$(2) (A+B)^T = A^T + B^T;$$

$$(3) (kA)^T = kA^T;$$

$$(4) (AB)^T = B^T A^T.$$

例 6. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 2 & 2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, 计算 $BA^T + C$.



解: 因为 $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$,

所以 $BA^T = \begin{pmatrix} 2 \times 1 + 1 \times 0 + 2 \times 2 & 2 \times 1 + 1 \times (-2) + 2 \times 0 \\ 0 \times 1 + 1 \times 0 + 0 \times 2 & 0 \times 1 + 1 \times (-2) + 0 \times 0 \\ 0 \times 1 + 0 \times 0 + 2 \times 2 & 0 \times 1 + 0 \times (-2) + 2 \times 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$,

所以 $BA^T + C = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 2 & 2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

四、方阵的行列式

由 n 阶方阵 A 的元素所构成的行列式 (各元素的位置不变), 称为方阵 A 的行列式, 记作 $|A|$.

由 A 确定 $|A|$ 的这个运算满足下述运算规律 (设 A 、 B 为 n 阶方阵, λ 为数):

(1) $|A^T| = |A|$ (行列式性质 1);

(2) $|\lambda A| = \lambda^n |A|$;

(3) $|AB| = |A||B|$;

(4) 若 $AB = O$, 则 $|A| = 0$ 或 $|B| = 0$.

例 7. 若 A 为三阶方阵 $|A| = 2$, 则 $|-3A| =$ _____.

解: 由题可知, $|A| = 2$, 所以 $|-3A| = (-3)^3 |A| = (-3)^3 \times 2 = -54$.

例 8. 设矩阵 A , B 为 n 阶方阵, 则下列说法正确的是 ().

A. $|3A| = 3|A|$

B. $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$

C. 若 $A^2 = O$, 则 $A = O$

D. 若 $|A| \neq 0$ 且 $AB = O$, 则 $|B| = 0$



解：D 项：当 $AB = O$ ，且 $|A| \neq 0$ 时，由方阵行列式的运算性质知 $|B| = 0$ ，

故本题答案为 D 项。

A 项：因为 A 为 n 阶方阵，由方阵行列式的运算性质知 $|3A| = 3^n |A|$ ，故排除。

B 项： $(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2$ ，因为矩阵乘法一般不满足交换律，

故 $AB \neq BA$ ，所以 $(A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2$ ，故排除。

C 项：如 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ， $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ，显然 A 并非零矩阵，故排除。

五、伴随矩阵

记 $A_{n \times n}$ 的方阵行列式为 $|A|$ ， $|A|$ 中每个元素 a_{ij} 对应的代数余子式为 A_{ij} 所构成的如下矩阵

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

称为矩阵 A 的伴随矩阵，记为 A^* 。

例 9. 若 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ ，求 A^* 。

解：因为 $|A|$ 对各元素的代数余子式为

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \times (-5) = -5, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \times 3 = -3,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \times (-1) = 1, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \times 1 = 1.$$

$$\text{所以 } A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

例 10. 若 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ ，求 A^* 。



解: 因为 $|A|$ 对应各元素的代数余子式为

$$A_{11}=2, A_{12}=1, A_{13}=1,$$

$$A_{21}=-2, A_{22}=-2, A_{23}=-1,$$

$$A_{31}=1, A_{32}=1, A_{33}=0,$$

$$\text{所以 } A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

例 11. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 则 $A^* =$ ().

A. $\begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} -d & -b \\ -c & -a \end{pmatrix}$

解: 因为 $|A|$ 对应各元素的代数余子式为

$$A_{11}=(-1)^{1+1} \times d = d, A_{12}=(-1)^{1+2} \times c = -c,$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1} \times b = -b, A_{22}=(-1)^{2+2} \times a = a.$$

$$\text{所以 } A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \text{ 故本题答案为 B 项.}$$

注: 重要结论: 二阶方阵的伴随矩阵等于其主对角元素互换, 副对角元素互为相反数.

六、矩阵的初等变换及其应用

1. 矩阵的初等行变换

下面三种变换称为矩阵的初等行变换:

(1) 交换矩阵的两行 (交换 i, j 两行, 记作 $r_i \leftrightarrow r_j$);

(2) 用非零常数 k 去乘矩阵的某一行的所有元素 (第 i 行乘 k , 记作 kr_i);

(3) 把某一行所有元素的 k 倍加到另一行的对应元素上去 (第 j 行的 k 倍加到第 i 行上, 记作 $r_i + kr_j$).

注: 矩阵初等行变换过程中用 “ $\rightarrow$ ” 连接, 而非 “ $=$ ”.



2. 行阶梯形矩阵

满足以下两个条件的矩阵称为行阶梯形矩阵：

- (1) 矩阵的零行（元素全为零的行）（若有），在矩阵的最下方；
- (2) 非零行的第一个不为零的元素（简称首非零元）所在的列其下方的元素全为零.

例如：
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ 和 } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
都是行阶梯形矩阵.

3. 行最简形矩阵

同时满足下列三个条件的矩阵称为行最简形矩阵：

- (1) A 为行阶梯形矩阵；
- (2) 非零行的首非零元为 1；
- (3) 首非零元所在列的其余元素全为 0.

例如：
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ 和 } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
都是行最简形矩阵.

4. 矩阵的秩

矩阵 A 对应的行阶梯形矩阵中，其非零行的行数称为矩阵 A 的秩. 记作 $r(A)$ 或 $R(A)$.

求秩的方法： $A \xrightarrow{\text{初等变换}} B$ （阶梯形矩阵）， $r(A) = r(B) = B$ 中非零行的行数.

例 12. 已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ，求 $r(A)$.

解：对矩阵做初等变换，化为行最简形矩阵



$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-3r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3+2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

所以 $r(A) = 3$.

例 13. 已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3k \\ -1 & 2k & -3 \\ k & -2 & 3 \end{pmatrix}$ 的秩为 2, 求 k .

$$\begin{aligned} \text{解: } A &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3k \\ -1 & 2k & -3 \\ k & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-kr_1]{r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3k \\ 0 & 2k-2 & 3k-3 \\ 0 & 2k-2 & 3-3k^2 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3k \\ 0 & 2(k-1) & 3(k-1) \\ 0 & 0 & -3(k+2)(k-1) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

又矩阵 A 的秩为 2, 所以 $-3(k+2)(k-1) = 0$ 且 $k \neq 1$,

解得 $k = -2$.

七、逆矩阵

1. 定义

对于 n 阶矩阵 A , 如果有一个 n 阶矩阵 B , 使

$$AB = BA = E,$$

则称 A 是可逆的, 并把矩阵 B 称为 A 的逆矩阵, 记为 $A^{-1} = B$.

2. 逆矩阵的性质

(1) 若 A 可逆, 则 A^{-1} 也可逆, 有 $(A^{-1})^{-1} = A$;

(2) 若 A 可逆, $\lambda \neq 0$, 则 λA 可逆, 且 $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$;

(3) 若 A 、 B 为同阶矩阵且均可逆, 则 AB 也可逆, 且 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;

(4) 若 A 可逆, A^T 也可逆, 且 $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$;



(5) 若 A 可逆, $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$.

3. 求逆矩阵有如下两种方法

(1) 伴随矩阵法求逆矩阵: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$, ($|A| \neq 0$).

(2) 初等行变换求逆矩阵: $(A|E) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E|A^{-1})$.

例 14. 已知 $A^2 - A - 2E = O$, 求 $(A+E)^{-1}$.

解: 等式整理得 $(A+E)(A-2E) = O$,

所以 $A+E$ 可逆, $(A+E)^{-1} = A-2E$.

例 15. 已知 $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, 求 A^{-1} .

解: 因为 $|A| = -2 \neq 0$, 所以 A 可逆,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*, \text{ 且 } A^* = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \text{ 所以 } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -\frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}.$$

注: 对于求二阶方阵的逆矩阵, 用伴随矩阵法显然比较容易, 但对于更高阶的方阵用伴随矩阵法求逆矩阵会涉及大量代数余子式的计算, 所以三阶及以上的方阵求逆矩阵会利用初等行变换更简便.

例 16. 已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, 求 A^{-1} .

解: 因为 $|A| \neq 0$, 所以 A 可逆, 利用初等变换可得

$$(A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$



$$\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} -\frac{1}{2}r_2 \\ -\frac{1}{2}r_3 \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_1 - r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1 - r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array} \right)$$

$$\text{所以 } A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

例 17. 已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, 求 A^{-1} .

解: 因为 $|A| \neq 0$, 所以 A 可逆, 利用初等变换可得

$$(A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} r_2 + r_1 \\ r_3 - r_1 \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_3 + r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} \frac{1}{3}r_2 \\ \frac{1}{3}r_3 \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \right)$$



$$\xrightarrow{r_1-2r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \right) \xrightarrow[r_2-\frac{5}{3}r_3]{r_1+\frac{1}{3}r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{5}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{9} & -\frac{5}{9} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \right),$$

$$\text{所以 } A^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 3 & -2 & -5 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

八、矩阵方程

在矩阵的一些运算中，常遇到一些已知矩阵 A ， B ， C 和未知数矩阵 X 满足 $AX=B$ ， $XA=B$ 或 $AXB=C$ 关系式，需要求解 X 矩阵，把这样类型的一些含有未知数矩阵的方程称为矩阵方程。

(1) 若 A 可逆，则对于矩阵方程 $AX=B$ ，方程两边同时左乘 A^{-1} 得

$$X = A^{-1}B.$$

(2) 若 A 可逆，则对于矩阵方程 $XA=B$ ，方程两边同时右乘 A^{-1} 得

$$X = BA^{-1}.$$

(3) 若 A ， B 都可逆，则对于矩阵方程 $AXB=C$ ，方程两边同时左乘 A^{-1} 右乘 B^{-1} 得

$$X = A^{-1}CB^{-1}.$$

例 18. 已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ， $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ，且满足 $AX=B$ ，求 X 。

解：因为 $|A|=1 \neq 0$ ，所以 A 可逆。

易知 $A^{-1}AX = A^{-1}B$ ，所以 $X = A^{-1}B$ ，

$$\text{则 } A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 即 } X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$



例 19. 已知 $AX=B$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, 求 X .

解: 由题可知, 因为 $|A| \neq 0$, 所以 A 可逆, $X=A^{-1}B$,

$$\begin{aligned} (A|B) &= \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 4 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & -1 & -9 \\ 0 & 1 & -6 & -2 & -12 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -6 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & -5 & -1 & -9 \end{array} \right) \xrightarrow{-\frac{1}{5}r_3} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -6 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{9}{5} \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{r_1-r_2} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 9 & 4 & 17 \\ 0 & 1 & -6 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{9}{5} \end{array} \right) \xrightarrow[r_2+6r_3]{r_1-9r_3} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & \frac{11}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{5} & -\frac{6}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{9}{5} \end{array} \right), \end{aligned}$$

$$\text{所以 } X = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 11 & 4 \\ -4 & -6 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}.$$

例 20. 设 $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, 满足 $AX=A+2X$, 求 X .

解: 由题可知, 等式整理得 $(A-2E)X=A$,

$$A-2E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ 因为 } |A-2E| \neq 0,$$

所以 $A-2E$ 可逆, 则 $X=(A-2E)^{-1}A$,



$$[(A-2E)|A] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{r_2-r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{-r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3-r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 3 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_2-r_3]{r_1-r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 3 \end{array} \right),$$

$$\text{所以 } X = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ 4 & -3 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$



第三节 线性方程组

本节学习目标

1. 掌握齐次线性方程组有非零解的判定条件及解的结构, 掌握非齐次线性方程组解的判定和结构.
2. 熟练掌握线性方程组的解法.

一、线性方程组的概念

设有 n 个未知数 m 个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \cdots \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \quad (1)$$

上式线性方程组可以应用矩阵乘法写成

$$Ax = b,$$

其中 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ 称为系数矩阵, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 称为未知数矩阵,

$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ 称为常数项矩阵, $A = (A|b) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ 称为增广矩阵.

线性方程组有两种类型, 当常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 不全为零时, 线性方程组 (1) 叫做 n 元非齐次线性方程组, 简记为 $Ax = b$; 当 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 全为零时, 线性方程组 (1) 成为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots \cdots \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases}$$



叫做齐次线性方程组，简记为 $Ax = O$ 。

二、齐次线性方程组 $Ax = O$ 解的结构

对于齐次线性方程组 $Ax = O$ ，由于 $r(A) = r(A|b)$ ，所以齐次线性方程组总有解：

1. 当 $r(A) = n$ 时，齐次线性方程组 $Ax = O$ 只有零解（或称有唯一解）；
2. 当 $r(A) < n$ 时，齐次线性方程组 $Ax = O$ 有非零解（或称有无穷多解），且解的个数（或称解向量的个数） $= n - r(A)$ 。

解齐次线性方程组 $Ax = O$ 可参照的步骤：

第一步 写出系数矩阵 A ；

第二步 将系数矩阵 A 化为行阶梯形矩阵；

第三步 判断解的情况；

第四步 化行阶梯形矩阵为行最简形矩阵；

第五步 写出同解方程，设自由未知量，写出通解，定义域。

例 1. 求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$$

解：由题可知，系数矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -4 \\ 0 & -3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{r_3 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{3}r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\xrightarrow{r_1-2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

故同解方程为
$$\begin{cases} x_1 = 3x_3 + \frac{5}{3}x_4 \\ x_2 = -2x_3 - \frac{4}{3}x_4 \end{cases}, \text{ 设 } x_3 = k_1, x_4 = k_2,$$

得通解为
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, (k_1, k_2 \in \mathbf{R}).$$

例 2. 求解线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 0, \\ -x_2 - x_4 = 0. \end{cases}$$

解: 由题可知, 系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[r_4+r_2]{r_3+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\xrightarrow{r_1+r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

故同解方程为 $x_2 = -x_4$ ，设 $x_4 = k$ ，得通解为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, (k \in \mathbf{R})$.

三、非齐次线性方程组 $Ax=b$ 解的结构

对于非齐次线性方程组 $Ax=b$ 有解的充要条件是 $r(A)=r(A|b)$ ，设 A 为 $m \times n$ 阶矩阵，在解线性方程组的实际过程中会有如下几种解的情形：

1. 当 $r(A)=r(A|b)=n$ 时，非齐次线性方程组 $Ax=b$ 有唯一解；
2. 当 $r(A)=r(A|b)<n$ 时，非齐次线性方程组 $Ax=b$ 有无穷多解；
3. 当 $r(A) \neq r(A|b)$ 时，方程组无解。

解非齐次线性方程组 $Ax=b$ 可参照的步骤：

第一步 写出增广矩阵 $(A|b)$ ；

第二步 将增广矩阵 $(A|b)$ 化为行阶梯形矩阵；

第三步 判断解的情况，若无解直接下结论；

第四步 若有解，化行阶梯形矩阵为行最简形矩阵；

第五步 写出同解方程，设自由未知量，写出通解，定义域。

例 3. 设非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的增广矩阵 $(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & a-1 & a(a-1) \end{array} \right)$ ，若方

程有唯一解，则 a 的取值为 ()。

- A.1 B.不等于 1 C.0 或 1 D.不等于 0 且不等于 1

解：由题可知，线性方程组有唯一解，故 $r(A)=r(A|b)=n=3$ ，



所以只需满足 $a-1 \neq 0$ 即可, 即 $a \neq 1$, 故本题答案为 B 项.

例 4. 求解线性方程组
$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 4. \end{cases}$$

解: 由题可知, 增广矩阵

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 5 & 7 & 1 \\ 4 & -6 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -11 & -15 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 5 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & -16 & -22 & 3 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_3-2r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 5 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right),$$

显然 $r(A) = 2$, $r(A|b) = 3$, 所以 $r(A) \neq r(A|b)$, 故该线性方程组无解.

注: 对于非齐次线性方程组显然存在无解的情形, 故将增广矩阵化为行阶梯形矩阵后必须判断其系数矩阵和增广矩阵的值是否相等.

例 5. 求解线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 3, \\ 2x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 13, \\ 3x_1 + 9x_2 - 9x_3 - 5x_4 = 8. \end{cases}$$

解: 由题可知, 增广矩阵

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & 6 & -3 & 0 & 13 \\ 3 & 9 & -9 & -5 & 8 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & -1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_3+3r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 20 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{1}{4}r_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_1+2r_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 3 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow[r_2-2r_3]{r_1-3r_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right),$$



所以同解方程为
$$\begin{cases} x_1 = -3x_2 + 2 \\ x_3 = -3 \\ x_4 = 5 \end{cases}, \text{ 令自由变量 } x_2 = k,$$

所以通解为
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, (k \in \mathbf{R}).$$

例 6. 求解线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_3 = 1 \\ 5x_1 + 3x_2 + (a+6)x_3 = b+5 \end{cases}, \text{ 问当 } a, b \text{ 为何值时?}$$

(1) 无解; (2) 唯一解; (3) 无穷多解, 有无穷多解时求其通解.

解: 由题可知, 增广矩阵 $(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & a+6 & b+5 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3-5r_1]{r_2-r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & a-4 & b \end{array} \right)$

$$\xrightarrow{r_3-2r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & a-2 & b \end{array} \right),$$

(1) 当 $a-2=0$ 且 $b \neq 0$ 时, $r(A)=2$, $r(A|b)=3$, 方程组无解;

(2) 当 $a \neq 2$ 时, $r(A)=r(A|b)=3$, 方程组有唯一解;

(3) 当 $a=2$ 且 $b=0$, $r(A)=r(A|b)=2$, 方程组有无穷多解;

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{-r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1-r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

故同解方程为
$$\begin{cases} x_1 = -x_3 + 1 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}, \text{ 令自由变量 } x_3 = k,$$



所以通解为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, (k \in \mathbf{R})$

蓝色森林专升本

蓝色森林专升本



第八章 向量代数与空间解析几何

第一节 向量代数

本节学习目标

1. 理解空间直角坐标系及向量的概念，掌握向量的坐标表示法，会求向量的模、方向余弦.
2. 掌握向量的线性运算、向量的数量积、向量积的计算方法，理解其几何意义.
3. 熟练掌握两向量平行、垂直的条件.

一、空间直角坐标系

在空间取定一点 O 作三条两两垂直的数轴，它们相交于 O 点，点 O 称为坐标原点，三条数轴依次记为 x 轴， y 轴和 z 轴，统称坐标轴，它们构成了一个空间直角坐标系，如下图 8-1.

- (1) 原点重合、单位刻度相同；
- (2) 坐标轴两两垂直；
- (3) 坐标轴的方向符合右手规则.

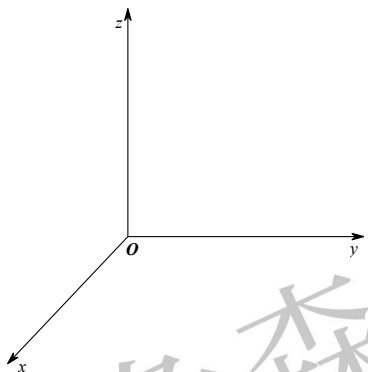


图 8-1

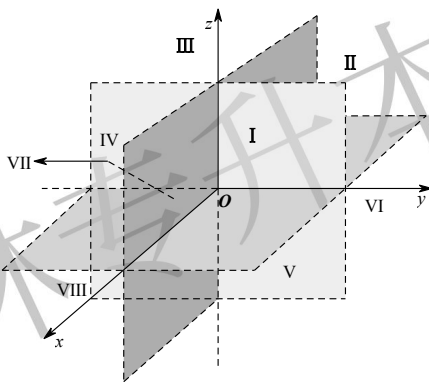


图 8-2

空间中任意一点用有序数 (x, y, z) 表示，由于空间直角坐标系是在平面直角坐标系基础上多加了一个坐标轴，故空间直角坐标系有轴、面、卦限的概念.

三条坐标轴中的任意两条可以确定一个平面，称为坐标面，坐标面有 xOy ， yOz ， xOz ；



三个坐标面把空间分成八个部分，每一个部分叫做一个**卦限**，如上图 8-2 所示.

第 I 卦限: $(x > 0, y > 0, z > 0)$

第 II 卦限: $(x < 0, y > 0, z > 0)$

第 III 卦限: $(x < 0, y < 0, z > 0)$

第 IV 卦限: $(x > 0, y < 0, z > 0)$

第 V 卦限: $(x > 0, y > 0, z < 0)$

第 VI 卦限: $(x < 0, y > 0, z < 0)$

第 VII 卦限: $(x < 0, y < 0, z < 0)$

第 VIII 卦限: $(x > 0, y < 0, z < 0)$

例 1. 空间直角坐标系中，点 $M_1(1, 2, 3)$ 与 $M_2(1, -2, 3)$ ().

A. 关于 xoy 面对称

B. 关于 xoz 面对称

C. 关于 $yo z$ 面对称

D. 关于原点对称

解: 显然 M_1 点在一卦限, M_2 点在四卦限, 故两点关于 xoz 面对称,

故本题答案为 B 项.

二、空间中两点间的距离公式

设空间中两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, 它们的距离公式表示为

$$d = |M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

例如: 空间中两点 $O(0, 0, 0)$, $P(1, 2, -2)$ 的距离为

$$d = |OP| = \sqrt{(1-0)^2 + (2-0)^2 + (-2-0)^2} = 3.$$

空间中两点距离公式在后面学习向量的模中常用, 需要读者了解.

三、向量的概念

1. 向量

客观世界中有这样一类量, 它们既有大小, 又有方向, 例如位移, 速度, 力, 加速度等等, 这一类量叫做**向量**(**矢量**).

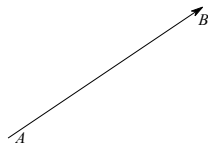


图 8-3

在数学上, 常用有向线段来表示向量, 如以 A 为起点, B 为终点的有向线段表示



的向量记为 $\overrightarrow{AB}$ (如上图 8-3),

有时也常用黑体字母 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{F}, \mathbf{v}$ 等表示向量.

2. 向量的模

向量的大小叫做向量的模. 向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模记作 $|\overrightarrow{AB}|$ 或 $|\mathbf{a}|$ 和 $|\vec{a}|$.

3. 几类常见的向量

(1) **零向量**: 模为 0 的向量称为零向量, 常记为 $\mathbf{0}$, 零向量的方向可以看作是任意的.

(2) **单位向量**: 模为 1 的向量叫作单位向量.

注: 非零向量 $\mathbf{a}$ 同向的单位向量记为 $\mathbf{e}_a$ (或 $\mathbf{a}^0$), 其中 $\mathbf{e}_a = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$.

(3) **自由向量**: 只与向量的模和方向有关, 与起点和终点无关的向量称为自由向量.

(4) **相等向量**: 两个向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的大小相等, 方向相同, 则两向量相等, 记作 $\mathbf{a} = \mathbf{b}$.

(5) **平行向量**: 两向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的方向相同或相反的向量称为平行向量, 记作 $\mathbf{a} // \mathbf{b}$.

(6) **垂直向量**: 两向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的夹角 $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\pi}{2}$, 则称两向量垂直, 记作 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$.

四、向量的坐标分解式及其向量的模

任意给定一个向量 $\mathbf{r}$, 对应点 M , 使得 $\overrightarrow{OM} = \mathbf{r}$, 以 OM 为对角线、三条坐标轴为棱作长方体 $RHMK - OPNQ$, 如下图 8-4 所示, 有:

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR},$$

设 $\overrightarrow{OP} = x\mathbf{i}$, $\overrightarrow{OQ} = y\mathbf{j}$, $\overrightarrow{OR} = z\mathbf{k}$, 则

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OM} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = (x, y, z).$$

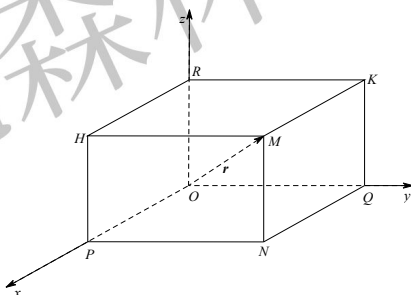


图 8-4



上式中, $\mathbf{i}$ 是 x 轴上的正向单位向量 $(1, 0, 0)$, $\mathbf{j}$ 是 y 轴上的正向单位向量 $(0, 1, 0)$, $\mathbf{k}$ 是 z 轴上的正向单位向量 $(0, 0, 1)$, 根据两点间距离公式可知

$$|\mathbf{r}| = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

例 2. 已知 $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, 求 $\mathbf{a}$ 的模.

解: 因为 $\mathbf{a} = (2, -1, 3)$, 所以 $|\mathbf{a}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$.

例 3. 已知 $\mathbf{a} = (2, -3, \sqrt{3})$, 求与 $\mathbf{a}$ 同向的 $\mathbf{a}^0 = (\quad)$.

A. $(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4})$

B. $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4})$

C. $(-1, \frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4})$

D. $(1, -3, \sqrt{3})$

解: 由题可知, $|\mathbf{a}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + (\sqrt{3})^2} = 4$,

所以 $\mathbf{a}^0 = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = (\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4})$, 故本题答案为 A 项.

五、方向角与方向余弦

非零向量 $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM} = (x, y, z)$, 与三条坐标轴的正方向的夹角 α 、 β 、 γ (其中 $0 \leq \alpha \leq \pi$, $0 \leq \beta \leq \pi$, $0 \leq \gamma \leq \pi$) 称为向量 $\mathbf{r}$ 的方向角. 如下图 8-5 所示, $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ 称为向量 $\mathbf{r}$ 的方向余弦, 由于 x 是有向线段 $\overrightarrow{OP}$ 的值, 且 $MP \perp OP$, 故

$$\cos \alpha = \frac{x}{|\overrightarrow{OM}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}};$$

$$\cos \beta = \frac{y}{|\overrightarrow{OM}|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}};$$

$$\cos \gamma = \frac{z}{|\overrightarrow{OM}|} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

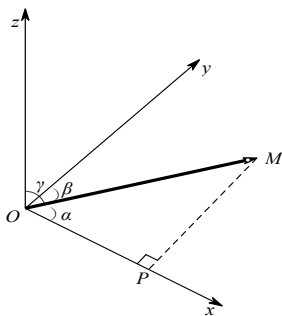


图 8-5

方向余弦有如下性质:



$$(1) \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1;$$

(2) $\mathbf{e}_r = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ 表示与 $\mathbf{r}$ 同方向的单位向量.

例 4. 向量 $\mathbf{a} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$ 的方向角是 ().

A. $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ B. $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ C. $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$

解: 由题可知, $\mathbf{a} = (0, 1, 1)$, 所以对应的方向余弦分别为

$$\cos \alpha = \frac{0}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2}} = 0, \quad \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \text{即与其对应的方向角为 } \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4},$$

故本题答案选 D 项.

例 5. 已知两点 $A(3, 0, 1)$ 和 $B(4, \sqrt{2}, 2)$, 求 $|\overrightarrow{AB}|$, 方向余弦和方向角.

解: $\overrightarrow{AB} = (1, \sqrt{2}, 1)$, 所以 $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2 + 1^2} = 2,$

$$\cos \alpha = \frac{1}{2}, \quad \cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos \gamma = \frac{1}{2};$$

故

$$\alpha = \frac{\pi}{3}, \quad \beta = \frac{\pi}{4}, \quad \gamma = \frac{\pi}{3}.$$

六、向量的运算

1. 向量的线性运算

利用向量的坐标, 可得向量的加法、减法以及向量与数的乘法运算法则. 设

$$\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z), \quad \mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z), \quad \text{则}$$

(1) 向量的加法与减法: $\mathbf{a} \pm \mathbf{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z).$

(2) 向量与数的乘法: 设 k 为常数, 则 $k\mathbf{a} = (ka_x, ka_y, ka_z).$

例 6. 已知 $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, 则 $3\mathbf{a} - 2\mathbf{b} =$ _____.



解: 由题可知, $\mathbf{a} = (1, 2, -1)$, $\mathbf{b} = (3, -2, 2)$,

则 $3\mathbf{a} = (3, 6, -3)$, $2\mathbf{b} = (6, -4, 4)$,

所以 $3\mathbf{a} - 2\mathbf{b} = (-3, 10, -7)$.

2. 两向量的数量积 (点积、内积)

对于任意两个向量 $\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1)$ 和 $\mathbf{b} = (x_2, y_2, z_2)$, 它们的数量积记作 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, 即

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta \text{ 或 } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

其中 $\cos \theta = \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, θ 为 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角, 且 $\theta \in [0, \pi]$,

$$\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}},$$

用作计算两向量的夹角.

当 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ 时, 即两向量夹角 $\theta = \frac{\pi}{2}$, 易得

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0.$$

数量积的计算符合以下运算规律:

(1) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$

(2) 交换律: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$

(3) 分配律: $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$

(4) 结合律: $\mathbf{a} \cdot (\lambda \mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$

例 7. 已知向量 $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, 则 $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\quad)$.

A. 0

B. $\frac{\pi}{2}$

C. $\frac{\pi}{3}$

D. π

解: 由题可知, $\mathbf{a} = (2, -1, 2)$, $\mathbf{b} = (-1, 2, 2)$,

$$\text{则 } \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{2 \times (-1) + (-1) \times 2 + 2 \times 2}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2}} = 0,$$



所以夹角 $(a, b) = \frac{\pi}{2}$, 故本题答案为 B 项.

例 8. 已知向量 $a = 3i - j - 2k$, $b = i + 2j - k$, 计算 $a \cdot b$.

解: 由题可知, $a = (3, -1, -2)$, $b = (1, 2, -1)$,

$$\text{则 } a \cdot b = 3 \times 1 + (-1) \times 2 + (-2) \times (-1) = 3.$$

例 9. 向量 $a = (1, 1, -4)$, $b = (2, 2, 1)$ 的位置关系 ().

A. 平行 B. 垂直 C. 相交但不垂直 D. 无法确定

解: 因为 $a \cdot b = 1 \times 2 + 1 \times 2 + (-4) \times 1 = 0$, 故两向量垂直, 故本题答案为 B 项.

3. 两向量的向量积 (叉积、外积)

(1) 定义

对于任意两个向量 a 和 b , 设 c 为它们的向量积记作 $c = a \times b$, 满足:

$$\text{① } |c| = |a \times b| = |a||b|\sin\theta \quad (\text{其中 } \theta \text{ 为 } a \text{ 与 } b \text{ 的夹角});$$

$$\text{② } c \perp a \text{ 且 } c \perp b \quad (c \text{ 既垂直于 } a, \text{ 又垂直于 } b).$$

(2) 向量积的坐标表示式

若 $a = (x_1, y_1, z_1)$, $b = (x_2, y_2, z_2)$, 则

$$c = a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = (y_1 z_2 - y_2 z_1)i - (x_1 z_2 - x_2 z_1)j + (x_1 y_2 - x_2 y_1)k.$$

重要结论: 两非零向量平行的充要条件

$$a \parallel b \Leftrightarrow a \times b = 0 \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

(3) 向量积在几何上的应用

求以 a 和 b 为邻边的平行四边形的面积: $S = |a \times b|$.

例 10. 若向量 $a = (0, 1, 1)$, $b = (1, 0, 1)$, $c = (1, 1, 0)$ 则 $(a \times b) \cdot c =$ _____.

解: 由题可知, $a \times b = (1, 1, -1)$, 则 $(a \times b) \cdot c = 1 \times 1 + 1 \times 1 + 0 \times (-1) = 2$.

例 11. 已知 $\overrightarrow{OA} = i + 3k$, $\overrightarrow{OB} = j + 3k$, 求 $\triangle OAB$ 的面积.



解：由题可知， $\overrightarrow{OA} = (1, 0, 3)$ ， $\overrightarrow{OB} = (0, 1, 3)$ ，

显然 $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = (-3, -3, 1)$ ，

所以 $\triangle OAB$ 面积为 $S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}| = \frac{1}{2} \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2 + 1^2} = \frac{1}{2} \sqrt{19}$ 。



第二节 空间解析几何

本节学习目标

1. 会求平面的点法式方程、一般式方程、截距式方程.会判定两个平面的位置关系.
2. 了解直线的一般式方程,会求直线的对称式(点向式)方程、参数式方程.会判定两条直线的位置关系.

一、平面及其方程

1. 平面的点法式方程

已知平面 π 过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 且以

$\mathbf{n}=(A, B, C)$ 为法向量的平面方程为

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0,$$

称为平面的点法式方程(如右图 8-6 所示).

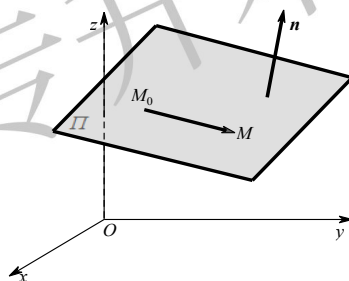


图 8-6

2. 平面的一般式方程

形如 $Ax+By+Cz+D=0$ 的方程称为平面的一般式方程, 其中 A, B, C, D 为常数, 且 A, B, C 不全为零.

对于平面的一般式方程, 有以下一些特殊的平面方程

- (1) 当 $D=0$ 时, 方程 $Ax+By+Cz=0$ 表示过原点的平面方程;
- (2) 当 $A=0$ 时, 方程 $By+Cz+D=0$ 表示平行于 x 轴的平面方程;
当 $A=0, D=0$ 时, 方程 $By+Cz=0$ 表示通过 x 轴的平面方程;
- (3) 当 $B=0$ 时, 方程 $Ax+Cz+D=0$ 表示平行于 y 轴的平面方程;
当 $B=0, D=0$ 时, 方程 $Ax+Cz=0$ 表示通过 y 轴的平面方程;
- (4) 当 $C=0$ 时, 方程 $Ax+By+D=0$ 表示平行于 z 轴的平面方程;
当 $C=0, D=0$ 时, 方程 $Ax+By=0$ 表示通过 z 轴的平面方程;
- (5) 当 $A=0, B=0$ 时, 方程 $Cz+D=0$ 表示平行于坐标面 xoy 轴的平面方程;
- (6) 当 $A=0, C=0$ 时, 方程 $By+D=0$ 表示平行于坐标面 xoz 轴的平面方程;
- (7) 当 $B=0, C=0$ 时, 方程 $Ax+D=0$ 表示平行于坐标面 $yo z$ 轴的平面方程;



3. 平面的截距式方程

形如

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

其中 a, b, c 分别为平面在三个坐标轴上的截距且均不为零 (如右图 8-7 所示).

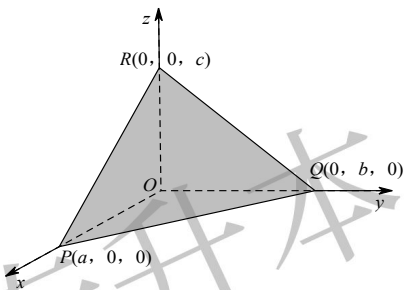


图 8-7

4. 平面与平面的位置关系

设平面 $\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$,

平面 $\pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$,

对应的法向量分别为 $\mathbf{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$,

$\mathbf{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$.

$$(1) \text{ 若 } \pi_1 // \pi_2 \Leftrightarrow \mathbf{n}_1 // \mathbf{n}_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

$$(2) \text{ 若 } \pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \mathbf{n}_1 \perp \mathbf{n}_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

$$(3) \text{ 平面 } \pi_1 \text{ 与 } \pi_2 \text{ 之间的夹角 } \theta (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}) \text{ (如右图 8-8 所示)}$$

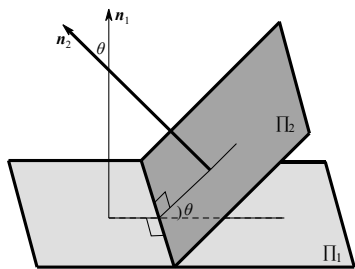


图 8-8

由以下公式确定

$$\cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

例 1. 已知 $BCD \neq 0$ 时, 且平面方程 $By + Cz + D = 0$, 则一定有平面 ().

A. 与 x 轴平行

B. 与 y 轴平行

C. 与 z 轴平行

D. 与 x 轴垂直

解: 因为平面方程 $By + Cz + D = 0$ 中, $A = 0$, 所以该平面平行于 x 轴, 故本题答案为 A 项.

例 2. 求过点 $M(-1, 2, -2)$, 且以 $\mathbf{n} = (-3, 2, 1)$ 为法向量的平面方程.

解: 由平面点法式方程可知, 满足该条件的平面方程为

$$-3(x+1) + 2(y-2) + (z+2) = 0, \text{ 即 } 3x - 2y - z + 5 = 0.$$



例 3. 过点 $(2, 1, 3)$ 且平行于平面 $3x + y - 2z + 6 = 0$ 的平面方程是_____.

解: 因为平面平行于 $3x + y - 2z + 6 = 0$, 所以两平面法向量取相等 $\boldsymbol{n} = (3, 1, -2)$,
又平面过点 $(2, 1, 3)$, 则要求平面方程为 $3(x-2) + y-1 - 2(z-3) = 0$,
即 $3x + y - 2z = 1$.

例 4. 与平面 $x + 2y + 3z + 4 = 0$ 垂直的平面方程为 ().

A. $x + 2y + 3z - 4 = 0$

B. $3x + 3y + z + 4 = 0$

C. $3x - 3y + z + 4 = 0$

D. $3x - 3y - z + 4 = 0$

解: 平面 $x + 2y + 3z + 4 = 0$ 的法向量记为 $\boldsymbol{n} = (1, 2, 3)$,

C 项: 平面 $3x - 3y + z + 4 = 0$ 的法向量记为 $\boldsymbol{n}_1 = (3, -3, 1)$,

显然 $3 \times 1 + 2 \times (-3) + 3 \times 1 = 0$, 则 $\boldsymbol{n}_1 \perp \boldsymbol{n}$, 即两平面垂直, 故本题答案为 C 项.

例 5. 平面 $x + y + z = 1$ 与 $x + y - z = 2$ 的位置关系是 ().

A. 重合

B. 平行

C. 垂直

D. 相交但不垂直

解: 两平面法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1 = (1, 1, 1)$, $\boldsymbol{n}_2 = (1, 1, -1)$ 显然对应坐标不成比例,
且 $1 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times (-1) \neq 0$, 故两平面法向量既不平行也不垂直,
则两平面相交但不垂直, 故本题答案为 D 项.

例 6. 求过三点 $M_1(2, -1, 4)$, $M_2(-1, 3, -2)$, $M_3(0, 2, 3)$ 的平面方程.

解: 平面法向量垂直于平面内任意两点构成的向量,

因为 $\overrightarrow{M_1M_2} = (-3, 4, -6)$, $\overrightarrow{M_1M_3} = (-2, 3, -1)$,

则平面法向量 $\boldsymbol{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3} = (14, 9, -1)$,

且平面过任意的一点, 则平面方程为 $14(x-2) + 9(y+1) - (z-4) = 0$,

即 $14x + 9y - z = 15$.

二、空间直线及其方程

1. 点向式方程

已知直线 L 过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 且以

$\boldsymbol{s} = (m, n, p)$ 为方向向量的直线方程为



$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p},$$

称为直线的点法式方程（如右图 8-9 所示）.

2. 参数式方程

由直线的点向式方程容易推导出直线的参数方程.

如设

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p} = t$$

则

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases}$$

方程组就是直线的参数方程.

3. 一般式方程

设有两平面 $\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ 和平面

$\pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ 相交于直线 L , 这条

相交直线方程为

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases},$$

称该方程为直线的一般式方程（如右图 8-10 所示）.

4. 两直线的位置关系

设直线方程为

$$L_1: \frac{x-x_0}{m_1} = \frac{y-y_0}{n_1} = \frac{z-z_0}{p_1},$$

$$L_2: \frac{x-x_0}{m_2} = \frac{y-y_0}{n_2} = \frac{z-z_0}{p_2}.$$

对应的方向向量分别为 $s_1 = (m_1, n_1, p_1)$, $s_2 = (m_2, n_2, p_2)$.

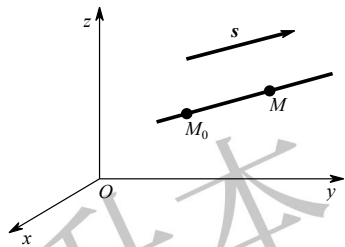


图 8-9

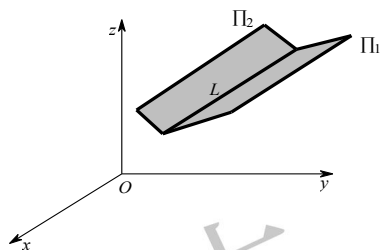


图 8-10



(1) 直线 L_1 与 L_2 平行的充要条件:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

(2) 直线 L_1 与 L_2 垂直的充要条件:

$$m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0.$$

(3) 直线 L_1 与 L_2 之间的夹角 $\theta (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$ 由以下公式确定

$$\cos \theta = \frac{|\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2|}{|\mathbf{s}_1||\mathbf{s}_2|} = \frac{|m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

5. 平面与直线的位置关系

设平面 $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$, 直线 $L: \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$,

其法向量和方向向量分别为 $\mathbf{n} = (A, B, C)$, $\mathbf{s} = (m, n, p)$.

(1) 平面 π 与直线 L 平行的充要条件:

$$Am + Bn + Cp = 0.$$

(2) 平面 π 与直线 L 垂直的充要条件:

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}.$$

(3) 直线 L 与平面 π 的夹角 $\theta (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$ 由以下公式确定

$$\sin \theta = \frac{|\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{s}||\mathbf{n}|} = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

例 7. 过点 $(1, 2, 3)$, 且平行于 $\mathbf{a} = (3, 2, 1)$ 的直线方程为 ().

A. $\frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+3}{1}$

B. $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{1}$

C. $\frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+3}{3}$

D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$

解: 因为直线过点 $(1, 2, 3)$, 且平行于 $\mathbf{a}$ 向量,



所以直线的方向向量也平行于 $\boldsymbol{a}$ 向量,

设直线方向向量 $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{a} = (3, 2, 1)$,

故直线方程为 $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{1}$, 故本题答案为 B 项.

例 8. 求过点 $(1, -2, 4)$ 且与平面 $2x - 3y + z - 4 = 0$ 垂直的直线方程.

解: 直线垂直于平面, 所以直线方向向量 $\boldsymbol{s}$ 平行于平面法向量 $\boldsymbol{n} = (2, -3, 1)$,

所以由点向式方程知, 直线方程为 $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-4}{1}$.

例 9. 求直线 $\frac{x+2}{3} = \frac{y-3}{-2} = z$ 与平面 $x + 2y + 2z - 5 = 0$ 的交点.

解: 设直线 $\frac{x+2}{3} = \frac{y-3}{-2} = z = t$,

解得直线的参数方程为 $\begin{cases} x = 3t - 2, \\ y = -2t + 3, \\ z = t. \end{cases}$ 代入直线方程得

$3t - 2 + 2(-2t + 3) + 2t - 5 = 0$, 解得 $t = 1$,

所以交点坐标为 $(1, 1, 1)$.

例 10. 判断直线 $L_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z-3}{1}$ 与直线 $L_2: x = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-1}{-11}$ 的位置关系.

解: 直线 L_1 的方向向量记为 $\boldsymbol{s}_1 = (2, -3, 1)$,

直线 L_2 的方向向量记为 $\boldsymbol{s}_2 = (1, -3, -11)$,

显然 $2 \times 1 + (-3) \times (-3) + 1 \times (-11) = 0$, 即数量积为 0,

故两直线垂直.

例 11. 直线 $L: \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{1}$ 与平面 $\pi: x + 2y - z + 3 = 0$ 的位置关系 ().

A. 互相垂直

B. 平行但直线不在平面内

C. 既不平行也不垂直

D. 直线在平面上

解: 直线 L 的方向向量记为 $\boldsymbol{s} = (3, -1, 1)$, 平面 π 的法向量记为 $\boldsymbol{n} = (1, 2, -1)$,



因为 $\mathbf{s} \cdot \mathbf{n} = 3 \times 1 + (-1) \times 2 + 1 \times (-1) = 0$,

所以 $\mathbf{s} \perp \mathbf{n}$, 故 $L \parallel \pi$, 取直线中一点 $(1, -1, 2)$ 代入平面方程得

$1 + 2 \times (-1) - 2 + 3 = 0$, 故直线在平面上, 故本题答案为 D 项.



第九章 概率统计

第一节 随机事件及其事件关系

本节学习目标

1. 理解随机事件的概念, 掌握事件之间的关系和运算.

一、随机事件

1. 随机现象

在自然界和社会上发生着诸多的现象, 有一类现象, 在一定条件下必然会发生, 例如, 水往低处流, 太阳东升西落, 同性磁铁相互排斥, 等等. 这类现象称为**确定性现象**.

在个别试验中, 有一类现象其结果呈现出不确定性, 例如:

问题 1: 抛一枚硬币, 观察正面、反面出现的情况.

问题 2: 抛一颗骰子, 观察出现的点数.

问题 3: 某射击运动员进行打靶试验, 命中靶环的情况.

这一类试验在通过大量重复试验后, 其结果又具有统计规律性的现象, 我们称之为**随机现象**.

2. 随机试验

随机现象在一定条件下每实现 1 次, 就进行了 1 次**随机试验**, 例如抛一枚硬币, 正面朝上是一次随机试验, 随机试验有以下 3 个特点:

- (1) 可以在相同的条件下重复的进行;
- (2) 每次试验的可能性不止一种, 并且能事先明确试验的所有可能结果;
- (3) 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

3. 随机事件

随机试验中所有可能的结果, 称为**随机事件**, 简称**事件**. 常用大写字母 A 、 B 、 C ... 表示, 如问题 1 中 $A = \{\text{出现正面}\}$, 问题 2 中 $B = \{\text{出现小于 5 的点}\}$, 问题 3 中 $C = \{\text{击中偶数环}\}$ 都是一个事件.

所有随机事件构成的集合, 称为**样本空间**, 记为 S . 样本空间的元素, 即样本空间中每个可能的结果称为一个**样本点**.



4. 两类特殊的事件

随机试验中必然会发生的事件，称为**必然事件**，记为 Ω （全集）。

随机试验中不可能发生的事件，称为**不可能事件**，记为 $\emptyset$ （空集）。

例如：自然状态下， 0°C 以下的水会结成冰一定是一个必然事件；太阳西升东落是一个不可能事件。

二、事件间的关系与事件的运算

1. 和（并）事件

事件 A 与事件 B 中至少有一个发生，称为事件 A 与事件 B 的**和事件**，记为 $A \cup B$ 或 $A+B$ 。从集合角度看，就是样本空间 Ω 中集合 A 与集合 B 的并集，如下图 9-1。

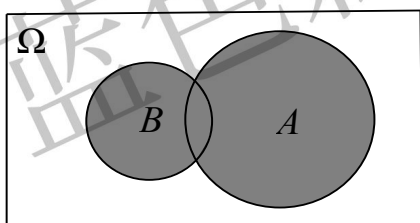


图 9-1

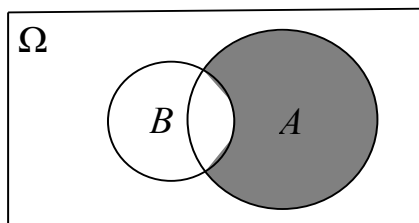


图 9-2

2. 差事件

事件 A 发生且事件 B 不发生，称为事件 A 与事件 B 的**差事件**，记为 $A-B$ 或 $\overline{AB}$ 。从集合角度看，就是样本空间 Ω 中集合 A 中除去集合 B 的事件，如上图 9-2。

3. 积（交）事件

事件 A 与事件 B 同时发生，称为事件 A 与事件 B 的**积事件**，记为 AB 或 $A \cap B$ 。从集合角度看，就是样本空间 Ω 中集合 A 与集合 B 的交集，如下图 9-3。

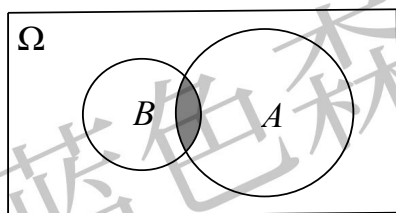


图 9-3

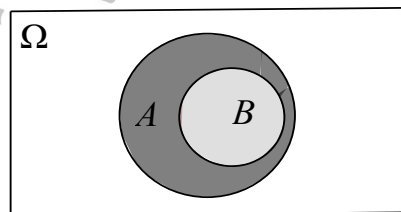


图 9-4

4. 包含事件

若事件 B 发生，必然导致事件 A 发生，则称 A 包含 B ，记为 $B \subset A$ 或 $A \supset B$ 。



从集合的角度看, B 是 A 的子集, 如上图 9-4.

5. 互斥事件 (互不相容事件)

若事件 A 与事件 B 在一次随机事件中不能同时发生, 即 $AB = \emptyset$, 则称事件 A 与事件 B 互斥或称互不相容.

从随机事件的结果看, A 与 B 互斥, 意味着事件 A 发生, 事件 B 一定不发生; 反之若事件 B 发生, 事件 A 一定不发生; 或者 A 与 B 都不发生, 相互排斥. 从集合角度看, A 与 B 互斥, 意味着集合 A 与 B 的交集为空集, 如下图 9-5.

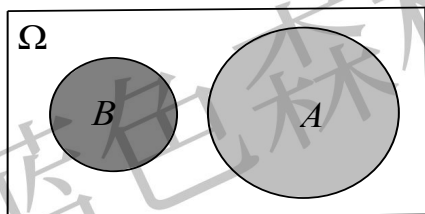


图 9-5

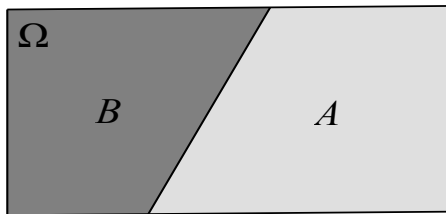


图 9-6

6. 对立事件 (互逆事件)

事件 A 与 B 既不能同时发生, 又必定有一个发生, 即 $AB = \emptyset$ 且 $A \cup B = \Omega$, 称 A 与 B 互为对立事件, 简称 A 与 B 互逆, 记作 $A = \bar{B}$ (或 $B = \bar{A}$); 从集合的角度看, 集合 A 与集合 B 是全集中互为补集的两个集合, 如上图 9-6.

注: 对立事件 (互逆事件) 是一种特殊的互斥事件, 即互逆必互斥, 但互斥不一定互逆.

7. 独立事件

若事件 A 发生与否与事件 B 的发生互不影响, 称事件 A 与事件 B 相互独立.

8. 德摩根律 (对偶律)

$$(1) \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B};$$

$$(2) \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

德摩根律的记忆口诀: 长杠变短杠, 开口换方向.

例 1. 若 A, B 为随机事件, 则下列正确的是 ().

A. $(A \cup B) - B = A - B$

B. $(A - B) \cup B = A$

C. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

D. $A \cup B = \bar{A}B \cup \bar{B}A$



解：A 项： $A \cup B$ 代表 A 事件与 B 事件的并事件或和事件，表示 A 事件与 B 事件至少有一个发生，而 $(A \cup B) - B$ 表示 A 事件与 B 事件至少有一个发生且 B 事件不发生，即 A 事件发生 B 事件不发生，记为 $(A \cup B) - B = A - B$ ，故本题答案为 A 项。

B 项： $(A - B) \cup B$ 表示 A 事件发生 B 事件不发生且与 B 事件至少有一个发生，故表示的是 $(A - B) \cup B = A + B$ ，故排除。

C 项：根据摩根律可知， $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ ，故排除。

D 项：因为 $\overline{AB}$ 表示 $B - A$ 即 B 事件发生而 A 事件不发生， $\overline{BA}$ 表示 $A - B$ 即 A 事件发生而 B 事件不发生，所以 $\overline{AB} \cup \overline{BA}$ 表示 B 事件发生而 A 事件不发生与 A 事件发生而 B 事件不发生中至少有一个发生，即 $\overline{AB} \cup \overline{BA} = A \cup B - AB$ ，故排除。

例 2. 对某目标进行三次射击，事件 $A = \{\text{第一次命中目标}\}$ ，事件 $B = \{\text{第二次命中目标}\}$ ， $C = \{\text{第三次命中目标}\}$ ，求下列各事件：

- (1) $\{\text{至少一次命中目标}\}$;
- (2) $\{\text{三次都命中目标}\}$;
- (3) $\{\text{第一次命中目标，但后两次未命中}\}$;
- (4) $\{\text{三次都未命中目标}\}$;
- (5) 三个事件中至少出现两个。

解：(1) 至少一次发生用事件的和，即 $A + B + C$ 或 $A \cup B \cup C$ ；

(2) 三次都命中目标即三次都击中目标，即表示积事件 ABC ；

(3) 第一次命中目标与后两次未命中需要同时发生，即 $\overline{ABC}$ ；

(4) 三次都未命中目标，即 A 、 B 、 C 三个事件都不发生且三个事件都不发生又要同时发生，记为 $\overline{ABC}$ 。

(5) 两个出现可能是 AB 、 AC 、 BC ，至少两个出现是一个和事件，记为 $AB + AC + BC$ 。



第二节 随机事件的概率

本节学习目标

1. 了解概率的统计定义，掌握概率的基本性质和概率的加法公式.
2. 掌握古典概率的计算公式，会求一些事件发生的概率.
3. 理解事件独立性的概念，能用事件的独立性计算概率.

一、频率与概率

1. 频率的定义

在相同条件下，进行了 n 次试验，在这 n 次试验中，事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的频数. 比值 $\frac{n_A}{n}$ 称为事件 A 发生的频率.

2. 概率的定义

在相同条件下，将随机试验重复 n 次，如果随着试验次数 n 的增大，事件 A 发生频率趋向一个越来越稳定的常数 p ，则称常数 p 为事件 A 的概率，记为 $p(A) = p$.

3. 概率的性质

性质 1 对于任意事件 A ，都有 $0 \leq p(A) \leq 1$.

性质 2 $p(\Omega) = 1$ ， $p(\emptyset) = 0$.

性质 3 $p(A) = 1 - p(\bar{A})$.

二、古典概型

1. 古典概型的定义

对于某些随机试验，对其中的事件，我们不必通过大量的试验去确定它的概率，而是通过研究它的内在规律去确定它的概率，如“抛硬币”，“掷骰子”等试验，发现他们具有下列两个共同的特点：

- (1) 试验的全部可能结果（即基本事件）是有限个，即样本空间是有限集；
- (2) 试验中每个基本事件出现（发生）的可能性相同，即每个基本事件的发生是等可能的.

具有上述两个特点的试验是大量存在的，这种试验称为古典概型.



例如：抛硬币试验中可能出现{正面朝上}，{反面朝上}的可能性均为 $\frac{1}{2}$ 。

2. 古典概型的概率计算公式

在古典概型中，如果样本空间所含的样本点总数为 n ，事件 A 包含其中的 m 个样本点，则事件 A 的概率为

$$p(A) = \frac{m}{n} = \frac{A \text{ 事件包含的基本事件个数}}{\text{总的基本事件个数}}$$

3. 排列组合公式

$$\textcircled{1} A_n^m = n(n-1)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!} \quad (\text{与顺序有关}).$$

$$\textcircled{2} C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!} \quad (\text{与顺序无关}).$$

$$\textcircled{3} C_n^m = C_n^{n-m}.$$

例 1. 袋中装有 5 个白球，3 个黑球，从中任意取两个球，求取出两个球都是白球的概率。

解：显然该事件是从袋中任取两个球，总的事件个数是有限个，

且每一个球被摸到的概率为 $\frac{1}{8}$ ，即基本事件的发生是等可能性的；

所以该事件为古典概型，设取得两个球都是白球的事件为 A ，则

$$p(A) = \frac{C_5^2}{C_8^2} = \frac{10}{28} = \frac{5}{14}.$$

例 2. 现有 10 件产品，其中有 3 件是次品，从中任取 2 件，则有一件次品的概率（ ）。

A. $\frac{6}{15}$ B. $\frac{7}{15}$ C. $\frac{8}{15}$ D. $\frac{9}{15}$

解：因为该事件从 10 件产品中取 2 件，总的事件个数为 C_{10}^2 ，总的样本空间为有限个，

每次取一件产品的概率为 $\frac{1}{10}$ ，每个基本事件的发生是等可能性的，

设取得一件次品的事件为 A ，故由古典概率公式可得，



$$p(A) = \frac{C_3^1 C_7^1}{C_{10}^2} = \frac{21}{45} = \frac{7}{15},$$

故本题答案为 B 项.

例 3. 在 0, 1, 2, 3, 4 五个数中任意取 3 个数, 则这三个数中不含 0 的概率为 ().

A. 0.4

B. 0.5

C. 0.6

D. 0.8

解: 由题可知, 从 5 个数中任取 3 个数, 总的事件个数为 C_5^3 , 即样本空间为有限个,

每次取一个数的概率为 $\frac{1}{5}$, 每个基本事件的发生是等可能性的,

设取得的 3 个数中不含 0 的事件为 A , 故由古典概率公式可得,

$$p(A) = \frac{C_4^3}{C_5^3} = \frac{4}{10} = 0.4,$$

故本题答案为 A 项.

例 4. 从 0~9 十个数中任意选取两个数, 则两个数的和大于 10 的概率为_____.

解: 由题可知, 从 10 个数中任取两个, 总的事件个数为 C_{10}^2 , 即样本空间为有限个,

每次取一个数的概率为 $\frac{1}{10}$, 每个基本事件的发生是等可能性的,

设取得的两个数的和大于 10 的事件为 A ,

共有如下几种情形: 取 2 和 9; 取 3 和 8; 3 和 9; 取 4 和 7; 4 和 8; 4 和 9;

取 5 和 6; 5 和 7; 5 和 8; 5 和 9; 取 6 和 7; 6 和 8;

6 和 9; 取 7 和 8; 7 和 9; 取 8 和 9, 共 16 种情形.

故由古典概率公式可得,

$$p(A) = \frac{16}{C_{10}^2} = \frac{16}{45}.$$

三、条件概率

设 A 、 B 是两个随机事件, 在事件 A 已发生的条件下, 事件 B 发生的概率称为**条件概率**, 记为 $P(B|A)$, 当 $P(A) \neq 0$ 时

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}.$$



由条件概率公式可以推出概率的乘法公式

$$P(AB) = P(A)P(B|A).$$

例 5. 已知 $P(B) = 0.2$, $P(A|B) = 0.8$, 则 $P(AB) =$ _____.

解: 因为 $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = 0.8$, 所以 $P(AB) = P(B)P(A|B) = 0.2 \times 0.8 = 0.16$.

例 6. 袋中有 5 个黑球和 3 个白球, 从中无放回取两次, 设 $A = \{\text{第一次取黑球}\}$, $B = \{\text{第二次取白球}\}$, 则 $P(B|A) =$ _____.

解: $P(B|A)$ 表示在 A 已发生的条件下, 事件 B 发生的概率, 即第一次取得黑球的前提下, 第二次取得白球, 因为是无放回的取两次, 故第二次共 7 个球, 取得白球与第一次取得黑球无关, 故 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{3}{7}$.

四、概率的基本运算

$$(1) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) \quad \text{【加法公式】}$$

$$(2) P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

$$(3) P(A - B) = P(\overline{A}B) = P(A) - P(AB) \quad \text{【减法公式】}$$

$$(4) P(\overline{A} \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}), \quad P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{AB}) \quad \text{【摩根律】}$$

$$(5) \text{如果 } B \subset A, \text{ 则 } P(AB) = P(B).$$

例 7. 某自动化工厂生产线上产品, 合格率为 0.9, 有放回的取两件, 则至少拿到一件合格产品的概率为_____.

解: 设至少拿到一件合格品的事件记为 A 事件, 则

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0.1 \times 0.1 = 0.99.$$

例 8. 已知 $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, 且 A 与 B 互不相容, 则 $p(A \cup B) =$ _____.

解: 因为 A 与 B 互不相容, 所以 $p(AB) = 0$,



$$\text{故 } p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(AB) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}.$$

例 9. 已知 $P(A) = 0.7$, $P(A - B) = 0.3$, 则 $p(\bar{A} \cup \bar{B}) =$ _____.

解: 由摩根律公式易得 $p(\bar{A} \cup \bar{B}) = p(\overline{AB}) = 1 - p(AB)$,

又因为 $P(A) = 0.7$, $P(A - B) = P(A) - P(AB)$,

易得 $P(AB) = P(A) - P(A - B) = 0.4$,

所以 $p(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - 0.4 = 0.6$.

例 10. 设 $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.5$, $P(\bar{B}|A) = 0.3$, 则 $p(A \cup B) =$ _____.

解: 因为 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$, 已知 $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.5$,

$$P(\bar{B}|A) = \frac{P(\overline{AB})}{P(A)} = \frac{P(A - B)}{P(A)} = \frac{P(A) - P(AB)}{P(A)} = 0.3, \text{ 易解得}$$

$$P(AB) = 0.21, \text{ 所以 } P(A \cup B) = 0.3 + 0.5 - 0.21 = 0.59.$$

五、事件的独立性

设 A , B 是两事件, 如果满足等式

$$P(AB) = P(A)P(B),$$

则称事件 A , B 相互独立.

定理一 设 A , B 是两事件, 且 $P(A) > 0$. 若 A , B 相互独立, 则 $p(B|A) = p(B)$. 反之亦然.

定理二 若事件 A 与 B 相互独立, 则下列各对事件也相互独立:

$$A \text{ 与 } \bar{B}, \bar{A} \text{ 与 } B, \bar{A} \text{ 与 } \bar{B}.$$

故 $P(A\bar{B}) = P(A)P(\bar{B})$; $P(\bar{A}B) = P(\bar{A})P(B)$; $P(\bar{A}\bar{B}) = P(\bar{A})P(\bar{B})$.

例 11. 甲乙两人参加考试, 甲通过的概率是 0.7, 乙通过的概率是 0.8.

(1) 甲乙都通过的概率;

(2) 甲乙至少一个人通过的概率.

解: 设甲通过的事件为 A , 乙通过的事件为 B ;



(1) 显然甲乙都通过互不影响，故为独立事件，则

$$P(AB) = P(A)P(B) = 0.7 \times 0.8 = 0.56.$$

(2) 甲乙至少有一人通过表示和事件，记为

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.7 + 0.8 - 0.7 \times 0.8 = 0.94.$$

例 12. 设 $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.2$, 且 A 与 B 相互独立, 则 $P(\overline{A \cup B})$.

解: 因为 A 与 B 相互独立, 由性质可知 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也相互独立,

$$\begin{aligned} \text{所以 } P(\overline{A \cup B}) &= P(\overline{A} \overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B}) \\ &= [1 - P(A)][1 - P(B)] = 0.5 \times 0.8 = 0.4. \end{aligned}$$

例 13. 有两发导弹独立进行拦截工作, 命中率为 0.6, 则至少有一发命中的概率为

解: 由题知, 两发导弹命中的事件分别记为 A 和 B ,

则至少有一发命中的概率记为 $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$,

因为 A 、 B 独立, 所以 $P(AB) = P(A)P(B)$,

故 $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.6 + 0.6 - 0.6 \times 0.6 = 0.84$.



第三节 随机变量及其分布

本节学习目标

1. 理解随机变量的概念，会求一些简单随机变量的分布.
2. 理解随机变量的数学期望及方差的概念，掌握数学期望和方差的基本性质，会求一些简单随机变量的数学期望和方差.

一、离散型随机变量及其分布律

如果随机变量 X 可能取的值是有限个，则称 X 为**离散型随机变量**，用表格或者数列通项完整表示离散型随机变量的取值与对应概率，称为随机变量的**分布列或分布律**，用表格表示如下：

X	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	p_3	$\dots$	p_n

分布列的性质：

$$\textcircled{1} \sum_{i=1}^n p_i = p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1;$$

$$\textcircled{2} 0 \leq p_i \leq 1.$$

例 1. 设 X 是一个离散型随机变量，其分布列如下，则 $m =$ _____.

X	-1	0	1
P	0.5	$2m$	$3m$

解：由概率归一性可知， $\sum_{i=1}^n p_i = 0.5 + 2m + 3m = 1$ ，解得 $m = 0.1$.

例 2. 设随机变量 X 的分布律为 $p(X=k) = \frac{k}{15} (k=1, 2, 3, 4, 5)$ ，则 $p(X < 5) =$ _____.

解：由题可知，由概率的归一性可知， $p(X < 5) = \frac{1}{15} + \frac{2}{15} + \frac{3}{15} + \frac{4}{15} = \frac{2}{3}$.

例 3. 已知离散型随机变量 X 的分布列如下：



X	0	1	2	3
P	0.5	0.2	0.1	b

(1) 求常数 b ; (2) 求 $p\{0.5 \leq X \leq 1\}$.

解: (1) 由概率归一性可知, $\sum_{i=1}^n p_i = 0.5 + 0.2 + 0.1 + b = 1$, 解得 $b = 0.2$.

(2) $p\{0.5 \leq X \leq 1\} = p(1) = 0.2$.

二、连续型随机变量及其数字特征

1. 定义

如果对于随机变量 X 的分布函数 $F(x)$, 存在非负可积函数 $f(x)$, 对于任意实数 x 有

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x) dx,$$

则称 X 为连续型随机变量, $f(x)$ 称为 X 的概率密度函数, 简称概率密度.

2. 概率密度函数具有以下性质:

(1) $f(x) \geq 0$, 即密度函数非负性;

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$;

(3) 特别强调: 连续性随机变量取任意指定值的概率都是 0, 即 $p(X = x_0) = 0$, 所以计算连续型随机变量落在某一区间上的概率时, 不必考虑该区间是开区间还是闭区间, 即有

$$P(a < x < b) = P(a \leq x < b) = P(a < x \leq b) = P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x) dx.$$

例 4. 设连续型随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$,

求 $P(|2X - 1| < 2)$.



解: $P(|2X-1|<2)=P\left(-\frac{1}{2}<X<\frac{3}{2}\right)=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{3}{2}}\frac{1}{2}x\mathrm{d}x=\frac{1}{4}x^2\Big|_0^{\frac{3}{2}}=\frac{9}{16};$

例 5. 设连续型随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases} Ax, & 1<x<2 \\ B, & 2<x<3 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 且

$$p(1<X<2)=p(2\leq X<3).$$

(1) 求常数 A, B ; (2) $p(1.4<X<2.5)$.

解: (1) 因为 $p(1<X<2)=p(2\leq X<3)$, 故 $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x$,

$$\text{易得 } \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_1^2 Ax\mathrm{d}x=\frac{1}{2}Ax^2\Big|_1^2=\frac{3}{2}A, \quad \int_2^3 f(x)\mathrm{d}x=\int_2^3 B\mathrm{d}x=Bx\Big|_2^3=B,$$

所以 $\frac{3}{2}A=B$; 又由概率的归一性知

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\int_1^2 Ax\mathrm{d}x+\int_2^3 B\mathrm{d}x=\frac{1}{2}Ax^2\Big|_1^2+Bx\Big|_2^3=\frac{3}{2}A+B=1,$$

综上解得 $A=\frac{1}{3}, B=\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} (2) \quad p(1.4<X<2.5) &= \int_{1.4}^2 f(x)\mathrm{d}x + \int_2^{2.5} f(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{1.4}^2 \frac{1}{3}x\mathrm{d}x + \int_2^{2.5} \frac{1}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{6}x^2\Big|_{1.4}^2 + \frac{1}{2}x\Big|_2^{2.5} = 0.59. \end{aligned}$$

三、随机变量的数字特征

1. 离散型随机变量的数学期望

对离散型随机变量 X , 其分布列为

X	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	p_3	$\dots$	p_n



则 $E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n$, 称为随机变量 X 的数学期望.

2. 离散型随机变量的方差

对于随机变量 X

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

称为随机变量 X 的方差, 它反映了随机变量 X 取值的波动情况.

3. 期望的性质

- ① 如果 C 为常数, 则 $E(C) = C$;
- ② X 为随机变量, 则 $E(aX + b) = aE(X) + b$;
- ③ X, Y 为随机变量, 则 $E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$;
- ④ X, Y 为相互独立的随机变量, 则 $E(XY) = E(X)E(Y)$.

4. 方差的性质

- ① 如果 C 为常数, 则 $D(C) = 0$;
- ② X 为随机变量, 则 $D(aX + b) = a^2 D(X)$;
- ③ X, Y 为相互独立的随机变量, $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$.

5. 离散型随机变量的分布函数

设 X 为随机变量, 对于任意实数 x , 称函数

$$F(x) = p(X \leq x), -\infty < x < +\infty$$

为随机变量 X 的分布函数.

6. 连续型随机变量的数学期望及方差

数学期望: $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$;

方差: $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - \left[\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \right]^2$.

7. 连续型随机变量的分布函数

设 X 为随机变量, 对于任意实数 x , 称函数

$$F(x) = p(X \leq x), -\infty < x < +\infty$$



为随机变量 X 的分布函数.

例 6. 设 ξ 的概率分布为

ξ	-1	0	2	3
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$

求: $E(\xi)$, $E(\xi^2)$, $D(\xi)$.

解: 由题可知, $E(\xi) = \sum_{i=1}^n \xi_i p_i = (-1) \times \frac{1}{8} + 0 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{4} = \frac{11}{8}$;

$$E(\xi^2) = \sum_{i=1}^n \xi_i^2 p_i = (-1)^2 \times \frac{1}{8} + 0^2 \times \frac{1}{4} + 2^2 \times \frac{3}{8} + 3^2 \times \frac{1}{4} = \frac{31}{8};$$

$$D(\xi) = E(\xi^2) - [E(\xi)]^2 = \frac{31}{8} - \left(\frac{11}{8}\right)^2 = \frac{127}{64}.$$

例 7. 若随机变量 X 、 Y 相互独立, 且 $E(X)=1$, $E(Y)=3$, 求 $E(2X+Y+5)$, $E(XY)$.

解: 因为 X 、 Y 相互独立, 且 $E(X)=1$, $E(Y)=3$, 所以

$$E(2X+Y+5) = 2E(X) + E(Y) + 5 = 10, \quad E(XY) = E(X)E(Y) = 3.$$

例 8. 口袋中有 5 个球, 编号为 1, 2, 3, 4, 5 从中任取 3 个球, 以 X 表示取出的 3 个球中的最大号码, 试求 X 的分布列及分布函数.

解: 由题可知, 随机变量 X 可能的取值为 3, 4, 5,

$$p(X=3) = \frac{1}{C_5^3} = \frac{1}{10}, \quad p(X=4) = \frac{C_3^2}{C_5^3} = \frac{3}{10}, \quad p(X=5) = \frac{C_4^2}{C_5^3} = \frac{3}{5},$$

故分布列为

X	3	4	5
P	0.1	0.3	0.6



$$\text{分布函数为 } F(x) = \begin{cases} 0, & x < 3 \\ 0.1, & 3 \leq x < 4 \\ 0.4, & 4 \leq x < 5 \\ 1, & x \geq 5 \end{cases}.$$

例 9. 已知 $E(X) = 8$, $D(X) = 2$, 则 $E(X^2) = \underline{\hspace{2cm}}$, $D(3X+4) = \underline{\hspace{2cm}}$.

解: 因为 $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$,

$$\text{所以 } E(X^2) = [E(X)]^2 + D(X) = 66, \quad D(3X+4) = 3^2 D(X) = 18.$$

例 10. 已知 X, Y 相互独立, 且 $D(X) = 1$, $D(Y) = 4$, 求 $D(2X-3Y) = (\quad)$.

A. -32

B. -10

C. 14

D. 40

解: 因为 X, Y 相互独立, $D(2X-3Y) = D(2X) + D(3Y) = 2^2 D(X) + 3^2 D(Y) = 40$,
故本题答案为 D 项.



附录一 重庆市普通高校“专升本”统一选拔考试大纲

高等数学

(考试科目代码 20)

I. 考试大纲适用对象及考试性质

本大纲适用于重庆市普通高校“专升本”的理工类和经济类考生。

“专升本”考试结果将作为重庆市普通高校高职高专学生申请“专升本”的成绩依据.本科院校根据考生考试成绩,按照已确定的招生计划择优录取.因此,该考试应具有较高的信度、效度,必要的区分度和适当的难度。

II. 考试内容与要求

一、一元函数微分学

1. 理解函数的概念,知道函数的表示法;会求函数的定义域及函数值.
2. 掌握函数的奇偶性、单调性、周期性、有界性.
3. 理解复合函数与反函数的定义,会求单调函数的反函数.
4. 掌握基本初等函数的性质与图像,了解初等函数的概念.
5. 理解极限的概念及性质,掌握极限的运算法则.
6. 理解无穷小量与无穷大量的概念及两者的关系,掌握无穷小量的性质和无穷小量的比较.
7. 了解夹逼准则与单调有界准则,掌握两个重要极限: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.
8. 理解函数连续与间断的定义,理解函数间断点的分类,会利用连续性求极限,会判别函数间断点的类型.
9. 理解闭区间上连续函数的有界性定理、最值定理、介值定理,并会用上述定理推证一些简单命题.
10. 理解导数的定义及几何意义,会根据定义求函数的导数.
11. 理解函数的可导与连续的关系.
12. 熟练掌握基本初等函数的导数公式、导数的四则运算法则、复合函数求导法则、



隐函数求导法、对数求导法及参数方程求导法，了解反函数的求导法则。

13. 了解高阶导数的概念，熟练掌握初等函数的一阶和高阶导数的求法。

14. 理解微分的定义、可微与可导的关系，了解微分的四则运算法则及一阶微分形式的不变性；会求函数的微分。

15. 理解罗尔（Rolle）定理、拉格朗日中值（Lagrange）定理，了解柯西（Cauchy）中值定理和泰勒（Taylor）中值定理.会用罗尔定理证明方程根的存在性，会用拉格朗日中值定理证明一些简单不等式。

16. 熟练掌握用洛必达法则求未定式的极限。

17. 理解函数极值的概念、极值存在的必要条件及充分条件。

18. 会求函数的单调区间和极值，会求函数的最大值与最小值，会解决一些简单的应用问题，会证明一些简单的不等式。

19. 了解函数的凹凸性及曲线的拐点的定义，会求函数的凹凸区间及曲线的拐点。

20. 会求曲线的渐近线，会描绘一些简单函数的图形。

二、一元函数积分学

1. 理解原函数和不定积分的概念及性质。

2. 熟练掌握不定积分的基本公式。

3. 熟练掌握不定积分的换元积分法和分部积分法。

4. 理解变限积分函数的定义，掌握求变限积分函数导数的方法。

5. 理解定积分的概念和几何意义，掌握定积分的基本性质。

6. 熟练掌握牛顿-莱布尼兹（Newton-Leibniz）公式，掌握定积分的换元法和分部积分法。7. 了解定积分的微元法，会求平面图形的面积及平面图形绕坐标轴旋转的旋转体的体积。

8. 了解无穷区间上有界函数的广义积分与有限区间上无界函数的瑕积分的概念，掌握其计算方法。

三、向量代数与空间解析几何

1. 理解空间直角坐标系及向量的概念，掌握向量的坐标表示法，会求向量的模、方向余弦。

2. 掌握向量的线性运算、向量的数量积、向量积的计算方法，理解其几何意义。

3. 熟练掌握两向量平行、垂直的条件。



4. 会求平面的点法式方程、一般式方程、截距式方程.会判定两个平面的位置关系.
5. 了解直线的一般式方程,会求直线的对称式(点向式)方程、参数式方程.会判定两条直线的位置关系.
6. 会判定直线与平面的位置关系.

四、多元函数微积分学

1. 理解二元函数的概念,会求一些简单二元函数的定义域.
2. 了解二元函数的极限、连续的定义及其基本性质.
3. 熟练掌握显函数的一阶、二阶偏导数的求法,了解高阶偏导数的求法.
4. 会求二元函数的极值,会用拉格朗日乘数法求条件极值.
5. 熟练掌握二元函数全微分的求法.
6. 熟练掌握二重积分的计算方法.

五、微分方程

1. 理解微分方程的定义及阶、解、通解、特解等概念.
2. 熟练掌握可分离变量的微分方程、齐次微分方程及一阶线性微分方程的解法.
3. 理解二阶常系数齐次线性微分方程解的性质及通解的结构.
4. 熟练掌握二阶常系数齐次线性微分方程的解法.

六、无穷级数

1. 理解无穷级数收敛、发散的概念.
2. 理解级数收敛的必要条件和级数的主要性质.
3. 知道几何级数 $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$, p -级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 的敛散性.
4. 熟练掌握正项级数的比较判别法、比值判别法与根值判别法.
5. 理解幂级数的收敛半径、收敛区间及收敛域的定义.
6. 熟练掌握求幂级数的收敛半径、收敛区间及收敛域的方法.

七、线性代数

1. 理解行列式的概念,掌握行列式的性质.
2. 掌握行列式的计算.
3. 会用克莱姆(Cramer)法则求解线性方程组.
4. 熟练掌握矩阵的线性运算及运算法则、矩阵的乘法及运算法则.



5. 理解方阵可逆的概念和判定法则, 掌握求可逆矩阵的逆矩阵的方法.
6. 理解矩阵的秩的概念, 掌握求矩阵秩的方法.
7. 会解简单的矩阵方程.
8. 熟练掌握矩阵的初等变换.
9. 掌握齐次线性方程组有非零解的判定条件及解的结构, 掌握非齐次线性方程组解的判定和结构.
10. 熟练掌握线性方程组的解法.

八、概率论初步

1. 理解随机事件的概念, 掌握事件之间的关系和运算.
2. 了解概率的统计定义, 掌握概率的基本性质和概率的加法公式.
3. 掌握古典概率的计算公式, 会求一些事件发生的概率.
4. 理解事件独立性的概念, 能用事件的独立性计算概率.
5. 理解随机变量的概念, 会求一些简单随机变量的分布.
6. 理解随机变量的数学期望及方差的概念, 掌握数学期望和方差的基本性质, 会求一些简单随机变量的数学期望和方差.

***注:** 本大纲对理论、概念等从高到低的要求是: 理解, 知道, 了解; 对方法、计算等从高到低的要求是: 熟练掌握, 掌握, 会.

III. 考试形式与试卷结构

一、试卷题型及分值分布

1. 试卷题型

单项选择题、填空题、计算题、证明题.

2. 分值分布

试卷总分为 120 分.

单项选择题 约 32 分.

填空题 约 16 分.

计算题 约 64 分.

证明题 约 8 分.



二、考试方式及考试时间

1. 考试方式为闭卷笔试.
2. 考试时间为 120 分钟.

【参考书目】

1. 同济大学数学系 高等数学（第六版）高等教育出版社
2. 彭玉芳等 线性代数（第二版）高等教育出版社
3. 同济大学数学系 概率论与数理统计（第 2 版）同济大学出版社

